

1920.

No. 7.

45

GENERAL LIBRARY

JUL 8 1920

UNIV. OF MICH.

ANNALEN

DER

PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. V. E. WIEDEMANN, P. BRÜDE.

VIERTE FOLGE.

Band 61. Heft 7.

DER GANZEN REIHE 366. BANDES 7. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Im Jahre 1920 erscheinen Bd. 61, 62 und 63 à 8 Hefte. Bd. 61 kostet M 45.—.

Nach dem Ausland in der Währung des betr. Landes.

Ausgegeben am 15. April 1920.

Inhalt.

	Seite
1. Héctor Isnardi und Richard Gans. Die magnetische Suszeptibilität von Antimon und Wismut; ein Beitrag zur Kenntnis der Form der Magnetonen	585
2. Robert Eppendahl. Über das piezoptische Verhalten von Topas	591
3. Fritz Sigismund Schmidt. Zur beschleunigten Bewegung kugelförmiger Körper in widerstehenden Mitteln	633

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig zu übersenden, die Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Leuten nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bestimmungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 61.

1. Die magnetische Suszeptibilität von Antimon und Wismut; ein Beitrag zur Kenntnis der Form der Magnetonen¹⁾;

von Héctor Isnardi und Richard Gans.

(Nach Messungen von Héctor Isnardi.)

Nach der Langevinschen²⁾ kinetischen Theorie des Magnetismus muß die spezifische Suszeptibilität χ diamagnetischer Körper von der Intensität des Feldes H unabhängig sein, während die experimentellen Arbeiten von Honda³⁾ und Owen⁴⁾ in einigen Fällen einen ausgesprochenen Einfluß von H auf χ zeigen (vgl. Fig. 1 und 2).

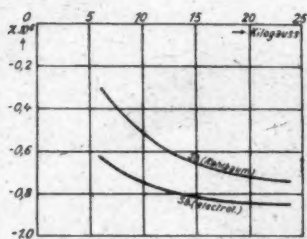


Fig. 1.

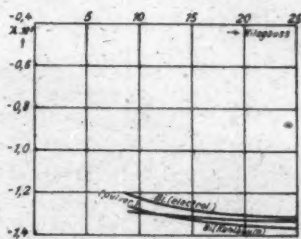


Fig. 2.

Beide Forscher schreiben diese Nichtkonstanz der Suszeptibilität der Gegenwart kleiner Mengen Eisen zu und deuten ihre Resultate als Überlagerung der negativen, konstanten Suszeptibilität des diamagnetischen Körpers (die gerade Linie A

1) Auszug aus der Veröffentlichung in Contribución al estudio de las ciencias. Universidad de La Plata. 2. S. 69. 1917.

2) P. Langevin, Ann. chim. phys. (8) 5. S. 70. 1905.

3) K. Honda, Ann. d. Phys. 32. S. 1027. 1910.

4) M. Owen, Ann. d. Phys. 37. S. 657. 1912.

in Fig. 3) und der variablen Suszeptibilität des Eisens (die Kurve *B* in Fig. 3), so daß eine Kurve vom Typus *C* entsteht.

Nun hat einer von uns¹⁾ eine statistische Theorie des Magnetismus entwickelt unter der Annahme, daß die Magnetonen starre, elektrisch geladene Körper sind, die sich unter dem Einflusse des äußeren Feldes und der thermischen Agitation befinden.

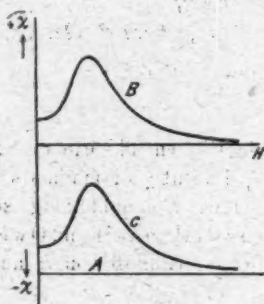


Fig. 3.

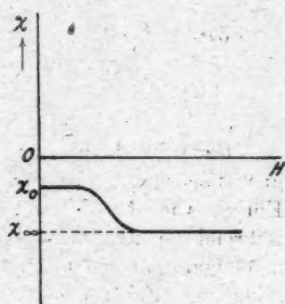


Fig. 4.

Nach dieser Theorie ist

$$(1) \quad \chi = -N \frac{e^2}{4m^2} \frac{2A+C}{3} [1 + h \Omega(\gamma)],$$

wo *N* die Anzahl Magnetonen im Gramm, *e/m* die spezifische Ladung des Elektrons, *A*, *B* und *C* die Hauptträgheitsmomente des Magnetons bedeuten, von denen *A* und *B* als gleich angenommen worden sind, so daß *B* in der Formel nicht vorkommt. *h* ist eine Abkürzung für

$$(2) \quad h = \frac{3}{2} \frac{1 - \frac{C}{A}}{2 + \frac{C}{A}}.$$

Ω eine transzendente Funktion, die von Gans berechnet und in einer Tabelle niedergelegt worden ist, und deren Argument

$$(3) \quad \gamma = H \frac{e}{2m} \sqrt{\frac{A-C}{2kT}}$$

dem Felde direkt und der Wurzel aus der absoluten Temperatur umgekehrt proportional ist, denn *k* ist die bekannte universelle Konstante der statistischen Mechanik.

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 49. S. 149. 1916.

Nach Gleichung (1) wird χ durch eine Kurve vom Typus der Fig. 4 dargestellt, die durch einen bestimmten Wert χ_0 für schwache Felder und einen anderen Wert χ_∞ für sehr starke Felder gekennzeichnet ist, und zwar gilt

$$(4) \quad \frac{\chi_\infty}{\chi_0} = \frac{3}{2 + \frac{C}{A}}$$

Nur wenn $A = C$ ist, d. h. wenn alle drei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, so daß $h = 0$ und $\gamma = 0$ ist, wird χ eine vom Felde und der Temperatur unabhängige Konstante

$$(5) \quad \chi_0 = -N \frac{e^2}{4m^3} A.$$

Da die Kurve C der Fig. 3 und die Kurve der Fig. 4 für starke Felder denselben qualitativen Verlauf zeigen, haben wir für einige Stoffe mit größtmöglicher Genauigkeit χ in seiner Abhängigkeit von H gemessen, und zwar innerhalb möglichst weiter Grenzen und besonders für schwache Felder, um zu entscheiden, ob die etwa beobachtete Veränderlichkeit von χ durch kleine Eisenbeimengungen hervorgerufen wird oder sich durch Verschiedenheit der Hauptträgheitsmomente des Magnetons erklärt, mit der Nebenabsicht, A und C mittels der Gleichungen (3) und (4) in absolutem Maße zu bestimmen.

Wir haben für die Beobachtungen Sb und Bi ausgewählt wegen des starken Feldeinflusses bei diesen Substanzen nach Honda und Owen.

Wir bedienten uns der Weiss'schen¹⁾ Meßmethode, welcher die Kraftwirkung in einem inhomogenen Felde zugrunde liegt, mußten also die Feldstärke und ihren Gradienten ballistisch messen, und zwar letzteren mit einem eigens konstruierten Schlittenapparat, so daß der ballistische Ausschlag bei seiner Verschiebung direkt den Gradienten ergab.

Zur Eichung in absolutem Maße benutzten wir Wasser mit dem von Weiss und Piccard²⁾ bestimmten Werte.

1) P. Weiss und G. Foëx, Arch. d. sc. phys. et nat. 31. S. 4, 1989, 117. 1911.

2) P. Weiss und P. Piccard, C. R. 155. S. 1234. 1912.

Natürlich wurde der schwache Magnetismus der Suspension gemessen und in Rechnung gezogen.

1. Antimon.

Ehe der zu den Messungen benutzte Zylinder gegossen wurde, wurde das Metall und die Bronzeform mit heißer Schwefelsäure gewaschen. Es ergaben sich folgende drei Maßreihen.

H	$-\chi \cdot 10^6$	H	$-\chi \cdot 10^6$	H	$-\chi \cdot 10^6$
2075	0,7787	1029	0,7950	3350	0,8189
3086	0,7670	1543	0,8087	5090	0,8092
4100	0,8048	2073	0,7410	6830	0,8100
5084	0,8112	3086	0,7838	8500	0,8395
6000	0,8254	4100	0,8145	10170	0,8166
6750	0,8183	5084	0,8048	13260	0,7890
7460	0,8153	6000	0,8179		
		6750	0,8164		
		7460	0,8143		
		8046	0,7923		

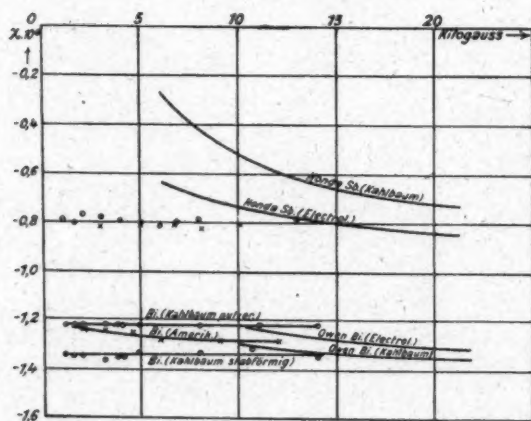


Fig. 5.

Die Resultate sind graphisch in Fig. 5 dargestellt, in der auch zum Vergleich die Hondaschen Resultate eingezeichnet worden sind.

2. Amerikanisches Wismut.¹⁾

Das granuliert Material wurde fein gepulvert. Die Ergebnisse sind folgende.

H	$-\chi \cdot 10^6$
1466	1,320
1962	1,241
3081	1,240
3244	1,243
4480	1,256
6002	1,289
8917	1,282
11680	1,279

Wegen der graphischen Darstellung vgl. Fig. 5.

3. Kahlbaumsches Wismut in Stangenform.

Da beim amerikanischen Wismut ein deutlicher, wenn auch schwacher Einfluß des Feldes beobachtbar war, haben wir uns aus Kahlbaumschem Wismut eine Stange gegossen und erhielten die folgenden Resultate.

H	$-\chi \cdot 10^6$
1084	1,352
1466	1,349
1962	1,347
3244	1,369
3935	1,358
4001	1,358
4900	1,328
8028	1,334
11720	1,317
13680	1,357

Hier war eine systematische Abhängigkeit von der Feldstärke, wie aus der Tabelle und der Figur hervorgeht, gänzlich verschwunden. Drehte man jedoch die Stange um ihre Achse um 90° , so ergab sich für das Feld $H = 8028$ Gauss der Wert $\chi = -1,17 \cdot 10^{-6}$. Das ist ein Einfluß der Kristallstruktur, wie ihn Owen (a. a. O.) bereits festgestellt hat.

1) Wismut aus der Filiale von Merek in den Vereinigten Staaten.

4 Kahlbaumsches Wismut in Pulverform.

Aus diesem Grunde haben wir auch mit pulverisiertem Wismut von Kahlbaum Messungen gemacht. Es ergab sich:

H	$-\chi \cdot 10^6$
1084	1,218
1466	1,223
1962	1,215
3244	1,221
3935	1,229
4001	1,225
4900	1,223
8028	1,228
11720	1,214
13680	1,222

Der in dieser Maßreihe gefundene Wert steht in befriedigender Übereinstimmung mit dem Mittelwert aus den beiden Zahlen, die in zueinander senkrechten Richtungen bei der Stange gefunden wurden.

In die Figur haben wir auch die von Owen an Kahlbaum-schem und elektrolytischem Bi ermittelten Werte eingetragen.

Ergebnisse.

1. Die Resultate unserer Messungen zeigen, daß die magnetische Suszeptibilität des Bi und Sb nicht von der Feldstärke abhängt, daß also die scheinbare Abhängigkeit, welche Honda und Owen beobachtet haben, auf Meßfehler und teilweise vielleicht auf Verunreinigung durch Eisen zurückzuführen ist.

2. Ein Vergleich mit der Gansschen Theorie ergibt, daß die Hauptträgheitsmomente eines Magnetons untereinander gleich sind. Wir haben dieses Resultat zwar nur am Bi und Sb festgestellt, wahrscheinlich gilt es, nach den Messungen von Honda und Owen zu urteilen, aber auch für die übrigen Elemente.

La Plata, April 1917, Instituto de Física.

(Eingegangen 4. Oktober 1919.)

2. Über das piezooptische Verhalten von Topas; von Robert Eppendahl.

(Göttinger Dissertation.)

Einleitung.

Das optische Verhalten eines durchsichtigen Kristalles ist bekannt, wenn die Parameter seines Polarisationsovaloides gegeben sind. Die Gleichung desselben lautet, auf ein beliebig im Kristall orientiertes Achsensystem X', Y', Z' bezogen:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \epsilon^4 = & a_{11} x'^2 + a_{22} y'^2 + a_{33} z'^2 + 2a_{23} y' z' + 2a_{31} z' x' \\ & + 2a_{12} x' y'. \end{aligned} \right.$$

Hierin sind die a_{hk} Parameter des Kristalles, die sogenannten Polarisationskonstanten¹⁾, für das betreffende Achsensystem. Im Falle, daß das Achsensystem mit den Hauptachsen des Ovaloides zusammenfällt, werden die a_{23} , a_{31} , $a_{12} = 0$ und die a_{11} , a_{22} und a_{33} zu den Quadraten der Hauptlichtgeschwindigkeiten.

Bei konstanten äußeren Bedingungen sind die Polarisationskonstanten nur Funktionen der Wellenlänge. Bei Änderung der äußeren Umstände, die Einfluß auf das physikalische Verhalten des Kristalles haben, ändern sie sich dagegen im allgemeinen gleichfalls. Für die Änderung des optischen Verhaltens eines Kristalles speziell durch elastische Deformation hat F. Pockels²⁾ nach dem Vorgang von Fr. Neumann³⁾ die Polarisationskonstanten als lineare Funktionen der Deformationsgrößen bzw. der Druckkomponenten angesetzt und auf dieser Grundlage die Theorie der beobachtbaren Erscheinungen abgeleitet, die erhaltenen Resultate auch durch experimentelle Untersuchungen an Kristallen des regulären

1) W. Voigt, Göttinger Nachr. 1896. Heft 3. S. 17.

2) F. Pockels, Wied. Ann. N. F. 37. 1889; Lehrbuch der Kristalloptik S. 467. 1906.

3) F. Neumann, Abh. d. Berliner Akad. II. 1841; Pogg. Ann. 54. S. 440. 1841.

Systems sowie des rhomboëdrischen Systems geprüft und bestätigt.¹⁾

In vorliegender Arbeit ist ein Vertreter des rhombischen Systems, nämlich Topas, der Untersuchung unterworfen, während im Anhang kurz über Beobachtungen am hexagonalen Beryll berichtet wird.²⁾ Eine mühsame Untersuchung des piezooptischen Verhaltens von Natriumchlorat, das wegen dessen Aktivität ein ganz besonderes Interesse erweckt, führte — vermutlich wegen optischer Störungen des benutzten Kristallmaterials — nicht zu sicheren Ergebnissen und muß daher unbesprochen bleiben.

Die Beobachtungen zur Bestimmung der piezooptischen Konstanten der bezüglichen Kristalle sind im Physikalischen Institute zu Göttingen durchgeführt worden; sie beziehen sich ebenso wie die Beobachtungen von Pockels auf den speziellen Fall einseitigen Druckes, für den die theoretischen Formeln besonders leicht abzuleiten sind. Ein rechtwinkliges Parallelepiped von gegebener Orientierung gegen den Kristall ist in der Längsrichtung einem einseitigen Drucke ausgesetzt, während die optischen Messungen sich auf die beiden zu dieser Druckrichtung senkrechten Richtungen erstrecken.

Zur Ausübung des einseitigen Druckes wurde zunächst für einige Messungen am Natriumchlorat derselbe Kompressionsapparat gebraucht, den Pockels zu seinen Beobachtungen im hiesigen Institut benutzt hatte. Eine eingehende Beschreibung dieser Druckvorrichtung findet sich bei Pockels.³⁾

Späterhin wurde ein neuer Druckapparat hergestellt. Eine $1\frac{1}{2}$ cm dicke Messingplatte (ungefähr 21 : 16 cm) ruhte als Tischplatte auf 4 starken Messingsäulen, die in eine schwere Holzplatte eingelassen waren. In der Mitte der Tischplatte stand eine kurze Messingsäule, deren obere Endfläche plan geschliffen war und zur Aufstellung des Kristallpräparates diente. Die Höhe dieser Säule war so abgemessen, daß, wenn der zur Messung der relativen Verzögerung benutzte Kompen-

1) F. Pockels, a. a. O. sowie Wied. Ann. N. F. **39**. S. 440. 1890; N. Jahrb. f. Miner. Beil.-Bd. **8**. S. 218. 1891; Drudes Ann. **11**. S. 726. 1903.

2) Die Fakultät hat gestattet, den auf Beryll bezüglichen Teil der Dissertation in diesem Auszug wiederzugeben.

3) F. Pockels, Wied. Ann. N. F. **37**. S. 164. 1889.

sator auf die Tischplatte aufgeschraubt wurde, das Kristallpräparat direkt vor bzw. hinter der Öffnung des Kompensators zu stehen kam. Zur Ausübung des Druckes wurde auf die obere Endfläche des Kristallparallelepipedes ein passendes Stahlstück aufgesetzt oder aufgekittet, das in eine Spitze endigte. Diese Spitze wiederum trug einen Messingrahmen, in dessen Ausschnitt die Säule und das Kristallpräparat stand und dessen Ebene senkrecht zur Beobachtungsrichtung war. Das Rähmchen führte durch einen Spalt in der Tischplatte nach unten, wo es mit einer Anhängenvorrichtung versehen wurde, die vermittelt einer Stahlspitze mit einem horizontalstehenden Hebel in Verbindung stand. Da bei dieser Vorrichtung der Druck zwischen zwei verhältnismäßig weit entfernten Spitzen wirkte, so war die Unsicherheit in der Druckrichtung nicht so groß, wie bei dem Pockelsschen Apparat; außerdem war die Aufstellung der Prismen eine viel bequemere und leichtere. Die Schwierigkeiten indessen, einen gleichmäßig über den Querschnitt des Präparates verteilten Druck zu erzielen, auf die Pockels schon in ausführlicher Weise eingegangen ist, waren nicht minder groß. Das Verhältnis des Hebelarmes, an dem die Stahlspitze des Rahmens angriff, zu dem Hebelarm, an welchem die Belastung wirkte, war verschieden. Es war 1 : 5 bei den meisten Kompensatormessungen, bei den Messungen der absoluten Verzögerungen dagegen 1 : 9,7.

Die Ausführung der Messungen geschah in analoger Weise, wie bei den Untersuchungen von Pockels. Zur Messung der relativen Verzögerungen diente derselbe Babinetsche Kompensator älterer Konstruktion, den er bei seinen Untersuchungen im Physikalischen Institut zu Göttingen benutzt hat.¹⁾ Infolge einer währenddem an demselben vorgenommenen Auswechselung der Quarzkeile betrug der Streifenabstand für Na-Licht nicht 23,8 Umdrehungen der Trommel, sondern 9,72 Umdrehungen.

Bei sämtlichen Beobachtungen der relativen Verzögerungen war das Kristallprisma zum Kompensator so orientiert, daß die Schwingungsrichtungen im Prisma parallel waren zu denen im Kompensator. Dann gilt für die durch Druck erzeugte

1) F. Pockels, Wied. Ann. N. F. 37. S. 166. 1889.

relative Verzögerung Δ der horizontal schwingenden Welle h gegen die vertikal schwingende v bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_{hv} &= \delta_h - \delta_v = \frac{D^0 \cdot p}{2\lambda} \left\{ \frac{\omega_h^{01} - \omega_h^2}{p \cdot v^2} \cdot n_h^{03} - \frac{\omega_v^{02} - \omega_v^2}{p \cdot v^2} \cdot n_v^{03} \right\} \\ &+ \frac{D - D^0}{\lambda} (n_h^0 - n_v^0) = \frac{\Delta'}{9,72} \end{aligned} \right.$$

Hierin bezeichnet D^0 die Dicke des Prismas in der Beobachtungsrichtung vor der Kompression, D diejenige während der Kompression; p den angewandten Druck in Gramm pro Quadratmillimeter. Derselbe ist

$$p = \frac{Q \cdot 9,7}{K_1 \cdot K_2} \quad \text{oder} \quad p = \frac{Q \cdot 5}{K_1 \cdot K_2},$$

wo Q die am Hebelende wirkende Belastung und $K_1 \cdot K_2$ der Querschnitt des Prismas ist. $D - D^0$ ist die Dickenänderung des Präparates in der Beobachtungsrichtung. n_h^0 und n_v^0 bezeichnen die ursprünglichen Brechungsindizes der horizontal und der vertikal schwingenden Welle. Das Glied

$$\frac{D - D^0}{\lambda} (n_h^0 - n_v^0)$$

ist eine Korrektion für die relative Verzögerung der entstehenden Dickenänderung, die speziell bei stark doppelbrechenden Kristallen von Einwirkung ist. Bei schwach doppelbrechenden Kristallen, wie Topas, beträgt diese Korrektion nur einen kleinen Bruchteil von 1 Proz. und kann bei nicht sehr genauen Messungen vernachlässigt werden; bei regulären Kristallen verschwindet sie überhaupt. Ferner bezeichnet v die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raum, ω^0 diejenige im undeformierten, ω diejenige im deformierten Kristall. Δ' ist die durch die Kompression erzeugte Streifenverschiebung des Kompensators, ausgedrückt in Umdrehungen der Trommel. Die Ungenauigkeit der Einstellung des schwarzen Kompensatorstreifens war je nach der Deutlichkeit des Streifens verschieden. Sie ging selten über $\pm 0,004 \lambda$ hinaus, und betrug in den meisten Fällen ungefähr 0,002—0,004 λ .

Der pro Millimeter Lichtweg durch die Druckeinheit von 1 g pro Quadratmillimeter erzeugte Gangunterschied werde mit Δ bezeichnet. Für ihn gilt:

$$(2') \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{A}_{hv} = \frac{A_{hv}}{p \cdot D^0} = \frac{1}{2l} & \left\{ \frac{\omega_h^{02} - \omega_h^2}{p \cdot v^2} \cdot n_h^{03} - \frac{\omega_v^{02} - \omega_v^2}{p \cdot v^2} \cdot n_v^{03} \right\} \\ & + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \frac{n_h^0 - n_v^0}{\lambda} \end{aligned} \right.$$

$\frac{D - D^0}{p \cdot D^0}$ ist hierbei die durch 1 g pro Quadratmillimeter hervorgerufene lineare Dilatation. Ist also \bar{A}_{hv} durch die Beobachtung gegeben, ferner die lineare Dilatation bekannt, so läßt sich der in der {...} stehende Ausdruck berechnen. Derselbe enthält die durch das Polarisationsvaloid und den Ansatz von Pockels gegebenen Konstanten des Kristalles.

Die Messung der absoluten Verzögerungen wurde mit einem Jaminschen Interferentialrefraktor spezieller Konstruktion ausgeführt, der nach Angaben von Prof. Voigt konstruiert war. Zwischen den Platten desselben stand außer dem Kompressionsapparat ein zur Messung der absoluten Verzögerung dienender Jaminscher Kompensator. Sämtliche Apparate waren fest auf einer großen Steinplatte montiert, um Erschütterungen zu vermeiden. Als Schutz gegen Temperaturschwankungen war das Ganze mit einem Pappkasten umgeben, der Fenster für den eintretenden Lichtstrahl und das Beobachtungsfernrohr enthielt. Ferner ragte aus demselben das Ende des zu belastenden Hebels und die Trommel des Jaminschen Kompensators heraus. Zur Aufhebung der durch das zu komprimierende Prisma hervorgerufenen ursprünglichen Verzögerungen des einen Lichtstrahles wurde immer ein zweites passendes Präparat in den Gang des anderen Strahles gestellt. Um die relative Stellung der beiden Prismen zu fixieren, waren dieselben nahe einander zwischen dünne Stahlstreifen gekittet. Eine etwaige Bewegung des komprimierten Prismas wurde so durch das Kompensationsprisma mitgemacht. Der Abstand der beiden interferierenden Strahlen und infolgedessen auch der beiden nebeneinanderstehenden Präparate betrug etwa 1 cm. Infolge der benutzten intensiven Lichtquelle und eines passend gewählten Einfallswinkels des auf die erste Platte des Jamins auffallenden Strahles wurde erreicht, daß die Verzögerung sowohl der vertikal schwingenden wie der horizontal schwingenden Welle in den meisten Fällen gemessen werden konnte. Die Intensität des Interferenzbildes, das durch die vertikal schwingende Welle erzeugt wurde, war die größere,

infolge der teilweisen Polarisation bei der Reflexion an den Glasplatten des Interferenzrefraktors. Jedoch genügte auch die Intensität des Interferenzbildes der horizontal schwingenden Welle zu genauen Messungen. An und für sich genügt die Beobachtung einer der beiden Schwingungen, da die relative Verzögerung mit dem Kompensator bestimmt war. Doch war es wünschenswert, beide Schwingungen zugänglich zu machen, um besonders diejenige mit der größeren absoluten Verzögerung messen zu können. Dieses war für die am Topas und Beryll zu messenden Verzögerungen von wesentlicher Bedeutung, da hier unter Umständen die Verschiebungen der Interferenzstreifen der horizontalen Welle die größeren waren. Die Trennung der beiden senkrecht zueinander polarisierten Interferenzbilder erfolgte durch ein großes Nicolsches Prisma, das hinter dem Beobachtungsfernrohr in den Strahlengang eingeschaltet wurde.

Für die durch Druck erzeugte absolute Verzögerung gilt:

$$(3) \quad \delta_{h/v} = \frac{D^0 \cdot p}{2\lambda} n_{h/v}^0 \cdot \frac{\omega_{h/v}^0 - \omega_{h/v}^2}{p \cdot v^2} + \frac{D - D^0}{\lambda} (n_{h/v}^0 - 1),$$

oder bezogen auf die Längeneinheit 1 mm und die Druckeinheit 1 g pro Millimeter:

$$(3') \quad \delta_{h/v} = \frac{1}{2\lambda} \frac{\omega_{h/v}^0 - \omega_{h/v}^2}{p \cdot v^2} \cdot n_{h/v}^0 + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \frac{n_{h/v}^0 - 1}{\lambda}.$$

Hierbei ist das letzte wegen der Dickenänderung des Prismas auftretende Glied in keinem Falle zu vernachlässigen. Wie die Messungen an Topas und Beryll gezeigt haben, kann dasselbe sogar von derselben Größenordnung sein, wie die direkt durch Druck erzeugte Verzögerung. Es kann der durch Druck erzeugten Verzögerung entgegenwirken und dieselbe sogar zum großen Teile wieder aufheben. Das Glied spielt hier somit keineswegs die Rolle einer Korrektion. Eine Kenntnis der elastischen Eigenschaften eines Kristalles ist daher bei diesen Messungen, bei denen das Präparat in Luft steht, erforderlich; prinzipiell könnte man natürlich das zu deformierende Prisma auch in eine Flüssigkeit von nahezu demselben Brechungsindex stellen, dann würde die Flüssigkeit die Dickenänderung ausgleichen und das letzte Glied in obiger Gleichung würde wegfallen. Ein Flüssigkeitstrog zwischen den Platten des Refraktors würde jedoch die Deutlichkeit des Interferenz-

bildet wesentlich einschränken und daher ziemlich viele experimentelle Schwierigkeiten verursachen.

Als Lichtquelle wurde zuerst Na-Licht benutzt, späterhin jedoch die gelbe Heliumlinie mit der Wellenlänge $\lambda = 588 \mu\mu$. Genauere Einzelheiten über die Art der Messungen mit dem Interferentialrefraktor, ihrer Ausführung im einzelnen, sowie über die Aufstellung der Kristallpräparate und die dabei sich ergebenden Schwierigkeiten, finden sich in ausführlicher Weise in den Arbeiten von Pockels, so daß hier die Erwähnung derselben genügen kann.

Das piezooptische Verhalten von Topas.

a) Die benutzten Prismen.

Das Material für die vorliegende Arbeit wurde mir in liebenswürdiger Weise von Hrn. Geheimrat Voigt zur Verfügung gestellt. Die benutzten sechs rechtwinkligen Parallelepipedea waren aus denselben sibirischen Kristallen geschnitten, die seiner Zeit das Material für die Bestimmung der Elastizitätskonstanten des Topases geliefert haben.¹⁾ Die genaue Kenntnis dieser Konstanten für die verwendeten Präparate war sehr wertvoll, weil (abgesehen von dem oben Ausgeführten) so nicht nur eine Bestimmung der piezooptischen Konstanten, sondern auch eine sichere Berechnung der elasto-optischen Konstanten ermöglicht wurde. Hierbei ist als piezooptische Konstanten nach Pockels die Konstantengruppe bezeichnet, die man erhält, wenn man die Polarisationskonstanten als lineare Funktionen der *Druckkomponenten* ansetzt, als elasto-optische dagegen diejenige, die bei der Entwicklung der Polarisationskonstanten in lineare Funktionen der *Deformationsgrößen* erhalten wird. Die Herstellung der Prismen ist von der Firma Dr. Steeg und Reuter in Homburg v. d. H. ausgeführt worden. Die Dimensionen und Orientierungen der einzelnen Prismen sind unten angegeben. Dabei werden die Richtungen der Prismenkanten mit L , K_1 und K_2 bezeichnet, wobei L die Längsrichtung, die immer mit der Druckrichtung zusammenfällt, K_1 und K_2 , welche die Beobachtungsrichtungen sind, je eine der schmalen Prismenkanten bedeutet.

1) W. Voigt, Wied. Ann. **84**, S. 981. 1888 (daselbst auch eine Beschreibung der aus Sibirien stammenden Kristalle).

Sie werden auf das natürliche Symmetrieachsensystem X^0 , Y^0 , Z^0 der rhombischen Kristalle (das zugleich optisches Symmetrieachsensystem ist, und zwar in der Weise, daß Z^0 parallel der ersten optischen Mittellinie liegt und $n_x^0 < n_y^0 < n_z^0$ ist) bezogen.

Prisma 1.

L parallel $X^0 = 7,06$ mm

K_1 „ $Y^0 = 3,710$ „

K_2 „ $Z^0 = 3,692$ „

Prisma 2.

L parallel $Y^0 = 7,06$ mm

K_1 „ $Z^0 = 3,708$ „

K_2 „ $X^0 = 3,692$ „

Prisma 3.

L parallel $Z^0 = 7,06$ mm

K_1 „ $X^0 = 3,702$ „

K_2 „ $Y^0 = 3,709$ „

Prisma 4.

L in der Mittellinie von X^0 u. $Y^0 = 7,06$ mm

K_1 parallel $Z^0 = 3,689$ „

K_2 senkrecht zu L u. $K_1 = 3,709$ „

Prisma 5.

L in der Mittellinie von Y^0 u. $Z^0 = 7,07$ mm

K_1 parallel $X^0 = 3,698$ „

K_2 senkrecht zu L u. $K_1 = 3,710$ „

Prisma 6.

L in der Mittellinie von Z^0 u. $X^0 = 7,02$ mm

K_1 parallel $Y^0 = 3,692$ „

K_2 senkrecht zu K_1 u. $L = 3,708$ „

Diese 6 Prismen sind zur Bestimmung der 12 piëzooptischen Konstanten des Topases ausreichend und bieten außerdem noch Möglichkeiten für die Prüfung der Theorie bzw. der Messungen.

Die natürlichen optischen Eigenschaften des Materiales waren recht gute. Es konnten in fast allen Beobachtungs-

richtungen deutliche Interferenzbilder erhalten werden. Eine Ausnahme machte Prisma 2, dessen eine Beobachtungsrichtung für die Messungen mit dem Interferentialrefraktor unbrauchbar war. Eine Bemerkung über die Art und die Ursache dieser optischen Unregelmäßigkeit findet sich in dem Abschnitt über die Beobachtungen.

b) Allgemeine Theorie für rhombische Kristalle.

Entsprechend der Symmetrie der rhombischen Kristalle, nach der die X^0 , Y^0 und Z^0 -Achsen zweizählige Symmetrieachsen sind, gilt für die Polarisationskonstanten als lineare Funktionen der Deformationsgrößen $x_x \dots y_x \dots$ folgender fundamentale Ansatz¹⁾:

$$(4) \quad \begin{cases} a_{11} - \omega_x^0 = p_{11} x_x + p_{12} y_y + p_{13} z_z, \\ a_{22} - \omega_y^0 = p_{21} x_x + p_{22} y_y + p_{23} z_z, \\ a_{33} - \omega_z^0 = p_{31} x_x + p_{32} y_y + p_{33} z_z, \\ a_{23} = p_{44} y_z, \quad a_{31} = p_{55} z_x, \quad a_{12} = p_{66} x_y, \end{cases}$$

der bei Einführung der Druckkomponenten $X_x \dots Y_z \dots$ die Form gewinnen mag:

$$(5) \quad \begin{cases} a_{11} - \omega_x^0 = -\{\pi_{11} X_x + \pi_{12} Y_y + \pi_{13} Z_z\}, \\ a_{22} - \omega_y^0 = -\{\pi_{21} X_x + \pi_{22} Y_y + \pi_{23} Z_z\}, \\ a_{33} - \omega_z^0 = -\{\pi_{31} X_x + \pi_{32} Y_y + \pi_{33} Z_z\}, \\ a_{23} = -\pi_{44} Y_z, \quad a_{31} = -\pi_{55} Z_x, \quad a_{12} = -\pi_{66} X_y. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind ω_x^0 , ω_y^0 und ω_z^0 die Hauptlichtgeschwindigkeiten des nichtdeformierten Kristalles. Ihre reziproken Werte, die Hauptbrechungsindizes, die von Mühlheims²⁾ an einem sibirischen Topase bestimmt worden sind, und welche für die vorliegenden Berechnungen verwertet wurden, sind:

$$n_x^0 = 1,61327; \quad n_y^0 = 1,61597; \quad n_z^0 = 1,62252.$$

Zur Berechnung des Zusammenhanges zwischen den p_{hk} und π_{hk} , wie auch zur Bestimmung der Dickenänderung eines Präparates, die nach obigem bei den Messungen der absoluten

1) F. Pockels, Wied. Ann. N. F. 37. S. 159, 1889.

2) Aus Landolt-Börnsteins Tabellen.

Verzögerungen eine wichtige Rolle spielt, sind folgende Beziehungen zwischen den Deformationsgrößen und den Druckkomponenten zu benutzen:

$$(6) \quad \begin{cases} x_x = -\{s_{11} X_x + s_{12} Y_y + s_{13} Z_z\}, \\ y_y = -\{s_{12} X_x + s_{22} Y_y + s_{23} Z_z\}, \\ z_z = -\{s_{13} X_x + s_{23} Y_y + s_{33} Z_z\}, \\ y_z = -s_{44} Y_z, \quad z_x = -s_{55} Z_x, \quad x_y = -s_{66} X_y. \end{cases}$$

Hierin sind die s_{hk} die Elastizitätsmoduln des Kristalles. Dieselben sind von W. Voigt für Topas bestimmt worden¹⁾ zu

$$\begin{aligned} s_{11} &= 4,941 \cdot 10^{-8}; & s_{22} &= 3,460 \cdot 10^{-8}; \\ s_{33} &= 3,771 \cdot 10^{-8}; & s_{44} &= 9,059 \cdot 10^{-8}; \\ s_{55} &= 7,991 \cdot 10^{-8}; & s_{66} &= 7,485 \cdot 10^{-8}; \\ s_{23} &= -0,651 \cdot 10^{-8}; & s_{13} &= -0,840 \cdot 10^{-8}; \\ s_{12} &= -1,953 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Die Druckkomponenten $X_x \dots Y_y \dots$ werden aus der Größe des Druckes p und dessen Richtungskosinus l_1, l_2, l_3 erhalten durch die Formeln:

$$(7) \quad \begin{cases} X_x = p \cdot l_1^2; & Y_y = p \cdot l_2^2; & Z_z = p \cdot l_3^2; \\ Y_z = p \cdot l_2 \cdot l_3; & Z_x = p \cdot l_3 \cdot l_1; & X_y = p \cdot l_1 \cdot l_2. \end{cases}$$

Die lineare Dilatation in einer Richtung m bestimmt sich dann durch die Größen (6) folgendermaßen; es wird²⁾:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{D - D^0}{D^0} &= x_x \cdot \cos^2(m, x) + y_y \cdot \cos^2(m, y) + z_z \cdot \cos^2(m, z) \\ &+ y_z \cdot \cos(m, y) \cdot \cos(m, z) + z_x \cdot \cos(m, z) \cdot \cos(m, x) \\ &+ x_y \cdot \cos(m, x) \cdot \cos(m, y). \end{aligned} \right.$$

Ferner gelten, wenn man die in zu (6) reziproken Formeln auftretenden Elastizitätskonstanten c_{hk} heranzieht, für die der Substanz eigentümlichen Konstanten π_{hk} und p_{hk} die Formeln³⁾:

$$(9) \quad p_{hk} = \sum_i^6 \pi_{hi} \cdot c_{ki}; \quad \pi_{hk} = \sum_i^6 p_{hi} \cdot s_{ki}.$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. 84. 1888.

2) W. Voigt, Elementare Mechanik 1901. S. 357.

3) F. Poekels, Lehrbuch d. Kristalloptik 1906. S. 468.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst mit Hilfe des Gleichungssystems (5) der Polarisationskonstanten die Größen π_{hk} für Topas bestimmt und aus diesen mittels der ersten dieser beiden Formeln (9) die elastooptischen Konstanten p_{hk} berechnet. Diese Formel ergibt speziell für rhombische Kristalle:

$$(10) \quad \begin{cases} p_{ih} = c_{h1}\pi_{i1} + c_{h2}\pi_{i2} + c_{h3}\pi_{i3} \\ \quad \quad \quad \text{für } i \text{ und } h = 1, 2, 3, \\ p_{kk} = c_{kk}\pi_{kk} \text{ für } k = 4, 5, 6. \end{cases}$$

Nach den Bestimmungen von W. Voigt haben die Elastizitätskonstanten c_{hk} für Topas die Werte:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 28,70 \cdot 10^6; & c_{22} &= 35,60 \cdot 10^6; & c_{33} &= 30,02 \cdot 10^6; \\ c_{44} &= 11,04 \cdot 10^6; & c_{55} &= 13,53 \cdot 10^6; & c_{66} &= 13,36 \cdot 10^6; \\ c_{23} &= 9,01 \cdot 10^6; & c_{31} &= 8,61 \cdot 10^6; & c_{12} &= 12,84 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

Fallen die Polarisationshauptachsen des deformierten Ovaloides mit den natürlichen Symmetrieachsen des Kristalles zusammen, so reduziert sich die Gleichung des Polarisationsovaloides (1) auf:

$$\varrho^4 = a_{11}x^{02} + a_{22}y^{02} + a_{33}z^{02},$$

worin die Größen a_{11} , a_{22} und a_{33} die Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten bedeuten, und zwar ist:

$$a_{11} = \omega_x^2; \quad a_{22} = \omega_y^2; \quad a_{33} = \omega_z^2.$$

Wenn die Hauptachsen X' , Y' , Z' des deformierten Ovaloides aber eine vom Symmetrieachsensystem abweichende Lage haben, so ist die Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten schwieriger. Bezeichnet man die Richtungskosinus zwischen den Achsen des undeformierten Ovaloides X^0 , Y^0 , Z^0 und X' , Y' , Z' gemäß dem Schema:

$$(11) \quad \begin{array}{c|ccc} & X' & Y' & Z' \\ \hline X^0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ Y^0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ Z^0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{array}$$

so geht der Ausdruck des Polarisationsovaloides, bezogen auf das System X^0 , Y^0 , Z^0 , wieder in die allgemeinere Form über.

Die kleinen Drehungen, welche das Polarisationshauptachsensystem X^0, Y^0, Z^0 bei Deformationen um die X^0, Y^0, Z^0 -Achse erfährt, mögen mit Φ_x, Φ_y, Φ_z bezeichnet werden. Für dieselben gelten in erster Annäherung die Gleichungen:

$$(15) \quad \operatorname{tg} 2 \Phi_x = \frac{2 a_{23}}{a_{33} - a_{33}}, \quad \operatorname{tg} 2 \Phi_y = \frac{2 a_{31}}{a_{33} - a_{11}}, \quad \operatorname{tg} 2 \Phi_z = \frac{2 a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Findet die Drehung nur um eine der Achsen statt, so gilt die auf jene Achse bezügliche der Formeln (15) streng. Dies ist der Fall, wenn nur eine der Größen a_{23}, a_{31}, a_{12} von Null verschieden ist. Betreffs der ausführlichen Ableitung dieser allgemeinen Formeln vergleiche man F. Poekels.¹⁾

Mit Hilfe der Hauptlichtgeschwindigkeiten $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ des deformierten Ovaloids, also des auf das Achsensystem X', Y', Z' bezogenen, lassen sich ferner die Lichtgeschwindigkeiten in jeder beliebigen Richtung des Kristalles bestimmen. Für dieselben besteht die bekannte Gleichung:

$$\omega_m^2 = \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{2} + \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{2} \cos(U \pm V).$$

Darin bedeutet m die Beobachtungsrichtung im System X', Y', Z' ; U und V sind die Winkel zwischen m bzw. der Wellennormale und den optischen Achsen.

c) Spezielle Formeln für den Fall einseitigen Druckes.

Prisma 1. Liegt die Druckrichtung parallel der X^0 -Achse, so wird: $p = X_x$. Nach den Formeln (6) ist dann:

$$x_x = -s_{11} \cdot p; \quad y_y = -s_{12} \cdot p; \quad z_z = -s_{13} \cdot p; \\ y_z = z_y = x_y = 0,$$

und die Gleichungen der Polarisationskonstanten (5) reduzieren sich auf:

$$\omega_x^2 - \omega_x^{02} = -p \cdot \pi_{11}, \\ \omega_y^2 - \omega_y^{02} = -p \cdot \pi_{31}, \\ \omega_z^2 - \omega_z^{02} = -p \cdot \pi_{31}.$$

da $a_{11} = \omega_x^2$; $a_{22} = \omega_y^2$; $a_{33} = \omega_z^2$ wird.

1) F. Poekels, Wied. Ann. 37. S. 1511. 1889; Lehrbuch d. Kristalloptik 1906. S. 65–68 u. 468–469.

In der Beobachtungsrichtung parallel K_1 ($\parallel Y^0$) erhält demnach die Formel (2') die Gestalt:

$$(16) \quad \bar{A}_{yz} = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\pi_{31}}{v^3} n_y^{03} - \frac{\pi_{11}}{v^3} n_z^{03} \right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_y^0 - n_z^0}{\lambda} \right],$$

denn es ist:

$$\frac{\omega_h^{03} - \omega_h^3}{p \cdot v^3} = \frac{\pi_{31}}{v^3} \quad \text{und} \quad \frac{\omega_v^{03} - \omega_v^3}{p \cdot v^3} = \frac{\pi_{11}}{v^3}$$

und für die absoluten Verzögerungen δ_y und δ_z gelten nach (8') die Formeln:

$$(17) \quad \begin{cases} \delta_y = \frac{1}{2\lambda} \cdot \left\{ \frac{\pi_{31}}{v^3} \right\} n_y^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_y^0 - 1}{\lambda} \right], \\ \delta_z = \frac{1}{2\lambda} \cdot \left\{ \frac{\pi_{11}}{v^3} \right\} n_z^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_z^0 - 1}{\lambda} \right]. \end{cases}$$

Die hier in Betracht kommende Dickenänderung ist:

$$D - D^0 = D^0 \cdot y_y = -p \cdot D^0 \cdot s_{12} = p \cdot D^0 \cdot 1,353 \cdot 10^{-8}.$$

Gemessen werden die relative Verzögerung \bar{A}_{yz} und die absoluten Verzögerungen δ_y und δ_z . Der Berechnung sind dann die in {...} stehenden Konstantenkombinationen bzw. Konstanten zugänglich. Für die Beobachtungsrichtung parallel K_2 ($\parallel Z^0$) ergibt sich entsprechend für die relative Verzögerung:

$$(18) \quad \bar{A}_{yz} = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\pi_{31}}{v^3} n_y^{03} - \frac{\pi_{11}}{v^3} n_z^{03} \right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_y^0 - n_z^0}{\lambda} \right]$$

und für die absoluten Verzögerungen:

$$(19) \quad \begin{cases} \delta_y = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\pi_{31}}{v^3} \right\} n_y^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_y^0 - 1}{\lambda} \right], \\ \delta_z = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\pi_{11}}{v^3} \right\} n_z^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_z^0 - 1}{\lambda} \right]. \end{cases}$$

Die Dickenänderung in dieser Richtung berechnet sich aus:

$$D - D^0 = D^0 \cdot z_z = -p \cdot D^0 \cdot s_{13} = p \cdot D^0 \cdot 0,840 \cdot 10^{-8}.$$

Prisma 2. Bei diesem Prisma wirkt der Druck parallel der Y^0 -Achse. Es ist demnach: $p = Y_y$ und nach (6):

$$\begin{aligned} x_x &= -s_{12} \cdot p; & y_y &= -s_{22} \cdot p; & z_z &= -s_{23} \cdot p; \\ y_z &= z_x = x_y = 0. \end{aligned}$$

Die Hauptachsen des deformierten Ovaloides fallen wieder mit denen des natürlichen Symmetrieachsensystems des

Kristalles zusammen. Es ist daher: $a_{11} = \omega_x^2$, $a_{22} = \omega_y^2$, $a_{33} = \omega_z^2$ und für die Gleichungen der Polarisationskonstanten (5) ergeben sich die Formeln:

$$\omega_x^2 - \omega_x^{02} = -p \cdot \pi_{12}.$$

$$\omega_y^2 - \omega_y^{02} = -p \cdot \pi_{22}.$$

$$\omega_z^2 - \omega_z^{02} = -p \cdot \pi_{32}.$$

In der Beobachtungsrichtung parallel $K_1[||Z^0]$ werden für die horizontal und die vertikal schwingenden Wellen folgende Ausdrücke erhalten:

$$\frac{\omega_h^{02} - \omega_h^2}{p \cdot v^2} = \frac{\omega_x^{02} - \omega_x^2}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{12}}{v^2},$$

$$\frac{\omega_z^{02} - \omega_z^2}{p \cdot v^2} = \frac{\omega_y^{02} - \omega_y^2}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{22}}{v^2}.$$

Die Gleichung (2') nimmt daher hier die Form an:

$$(20) \quad \bar{A}_{xy} = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\pi_{12}}{v^2} n_x^{03} - \frac{\pi_{22}}{v^2} n_y^{03} \right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_z^0 - n_y^0}{\lambda} \right]$$

und (3') wird zu:

$$(21) \quad \begin{cases} \delta_x = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\pi_{12}}{v^2} \right\} n_x^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_z^0 - 1}{\lambda} \right], \\ \delta_y = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\pi_{22}}{v^2} \right\} n_y^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_y^0 - 1}{\lambda} \right]. \end{cases}$$

Die Dickenänderung parallel der Z^0 -Achse ist:

$$D - D^0 = D^0 \cdot z_z = -p \cdot D^0 \cdot s_{23} = p \cdot D^0 \cdot 0,651 \cdot 10^{-8}.$$

Die Dickenänderung wirkt in dieser Richtung im umgekehrten Sinne wie bei Prisma 1 auf die Änderung der Doppelbrechung ein, wegen des negativen Vorzeichens von $(n_z^0 - n_y^0)$; sie sucht die durch Druck erzeugte Verzögerung zu verringern, während bei Prisma 1 dieselbe durch die Dickenänderung vergrößert wurde.

Wegen einer in dieser Beobachtungsrichtung auftretenden optischen Unregelmäßigkeit kamen die Formeln (21) nicht in Anwendung.

In der Beobachtungsrichtung parallel $K_2[||X^0]$ gelten für die in Betracht kommenden Geschwindigkeiten ω_x und ω_z die Gleichungen:

$$\frac{\omega_y^{02} - \omega_z^{02}}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{22}}{v^2}; \quad \frac{\omega_y^{02} - \omega_z^{02}}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{22}}{v^2}.$$

Diese Ausdrücke in (2') und (3') eingesetzt, ergeben:

$$(22) \quad \bar{A}_{zy} = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\pi_{22}}{v^2} \cdot n_z^{03} - \frac{\pi_{22}}{v^2} \cdot n_y^{03} \right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_z^0 - n_y^0}{\lambda} \right]$$

und

$$(23) \quad \begin{cases} \delta_z = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\pi_{22}}{v^2} \right\} n_z^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_z^0 - 1}{\lambda} \right], \\ \delta_y = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\pi_{22}}{v^2} \right\} n_y^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_y^0 - 1}{\lambda} \right]. \end{cases}$$

In dieser Beobachtungsrichtung ist ferner die Dickenänderung:

$$D - D^0 = D^0 \cdot x_z = -p \cdot D^0 \cdot s_{12} = p \cdot D^0 \cdot 1,353 \cdot 10^{-8}.$$

Prisma 3. Hier wirkt der Druck parallel der Z^0 -Achse. Es ist $p = Z_x$ und

$$x_x = -s_{13} \cdot p; \quad y_y = -s_{23} \cdot p; \quad z_z = -s_{33} \cdot p;$$

$$y_z = z_x = x_y = 0.$$

Die Gleichungen (5) werden zu:

$$\omega_x^{02} - \omega_z^{02} = -\pi_{13} \cdot p,$$

$$\omega_y^{02} - \omega_z^{02} = -\pi_{23} \cdot p,$$

$$\omega_x^{02} - \omega_y^{02} = -\pi_{33} \cdot p.$$

Für die in der Beobachtungsrichtung parallel $K_1[||X^0]$ in Betracht kommenden Geschwindigkeiten ω_y und ω_z gelten die Beziehungen:

$$\frac{\omega_y^{02} - \omega_z^{02}}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{13}}{v^2}; \quad \frac{\omega_y^{02} - \omega_z^{02}}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{23}}{v^2}.$$

Die zu messende relative Verzögerung drückt sich daher folgendermaßen aus:

$$(24) \quad \bar{A}_{yz} = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\pi_{23}}{v^2} n_y^{03} - \frac{\pi_{23}}{v^2} n_z^{03} \right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_y^0 - n_z^0}{\lambda} \right]$$

und für die absoluten Verzögerungen gilt:

$$(25) \quad \begin{cases} \delta_y = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\pi_{23}}{v^2} \right\} n_y^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_y^0 - 1}{\lambda} \right], \\ \delta_z = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\pi_{23}}{v^2} \right\} n_z^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_z^0 - 1}{\lambda} \right]. \end{cases}$$

Ferner ist die in Rechnung zu setzende Dickenänderung:

$$D - D^0 = D^0 \cdot x_s = -p \cdot D^0 \cdot s_{13} = p \cdot D^0 \cdot 0,840 \cdot 10^{-8}.$$

In der Beobachtungsrichtung parallel $K_2[|| Y^0]$ sind die Lichtgeschwindigkeiten ω_s und ω_z zu beobachten. Für diese folgen aus dem Ovaloid die Beziehungen:

$$\frac{\omega_s^{02} - \omega_z^2}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{33}}{v^2} \quad \text{und} \quad \frac{\omega_z^{02} - \omega_s^2}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{13}}{v^2}.$$

In (2') eingesetzt, wird die relative Verzögerung:

$$(26) \quad \bar{A}_{1z} = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\pi_{13}}{v^2} n_x^{03} - \frac{\pi_{33}}{v^2} n_z^{03} \right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_z^0 - n_s^0}{\lambda} \right]$$

und die absoluten Verzögerungen nach (8') ergeben:

$$(27) \quad \begin{cases} \delta_x = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\pi_{13}}{v^2} \right\} n_x^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_z^0 - 1}{\lambda} \right], \\ \delta_z = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\pi_{33}}{v^2} \right\} n_z^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_s^0 - 1}{\lambda} \right]. \end{cases}$$

Die hier in Betracht kommende Dickenänderung bestimmt sich aus:

$$D - D^0 = D^0 \cdot y_y = -p \cdot D^0 \cdot s_{23} = p \cdot D^0 \cdot 0,651 \cdot 10^{-8}.$$

Bei Prisma 3 wirkt — genau wie in der Beobachtungsrichtung parallel Z^0 des Prismas 2 — in beiden Beobachtungsrichtungen die durch die Dickenänderung entstehende Verzögerung der allein durch Druck entstehenden entgegen. Infolge der geringen natürlichen Doppelbrechung des Topases ist dieses jedoch ebenso, wie die in anderen Richtungen durch die Dickenänderung entstehende Vergrößerung der relativen Verzögerung ohne wesentliche Bedeutung. Die Vernachlässigung der Dickenänderung bei der relativen Verzögerung würde noch nicht 1 Proz. betragen.

Prisma 4. Bei diesem Präparat liegt die Druckrichtung L in der X^0 - Y^0 -Ebene unter -45° gegen die X^0 -Achse geneigt. Demzufolge ist nach (7):

$$X_z = +\frac{p}{2}; \quad Y_y = +\frac{p}{2}; \quad Z_x = Y_z = Z_s = 0;$$

$$X_y = -\frac{p}{2}$$

und nach (6):

$$x_x = -\frac{p}{2} \{s_{11} + s_{13}\},$$

$$y_y = -\frac{p}{2} \{s_{12} + s_{22}\},$$

$$z_z = -\frac{p}{2} \{s_{13} + s_{23}\},$$

$$y_z = z_x = 0,$$

$$x_y = +\frac{p}{2} \cdot s_{66}.$$

In der zu L senkrechten Beobachtungsrichtung parallel K_2 wird nach (8) die Dickenänderung des Prismas gegeben durch:

$$D - D^0 = \frac{1}{2} D^0 \{x_x + y_y + z_z\} = -\frac{1}{4} p \cdot D^0 \{s_{11} + 2s_{12} + s_{22} + s_{66}\} \\ = + p \cdot D^0 \cdot 0,598 \cdot 10^{-8}.$$

Der Ansatz für die Polarisationskonstanten (5) reduziert sich für diese Druckrichtung auf:

$$a_{11} - \omega_x^{02} = -p \left\{ \frac{\pi_{11} + \pi_{12}}{2} \right\},$$

$$a_{22} - \omega_y^{02} = -p \left\{ \frac{\pi_{21} + \pi_{22}}{2} \right\},$$

$$a_{33} - \omega_z^{02} = -p \left\{ \frac{\pi_{31} + \pi_{32}}{2} \right\},$$

$$a_{23} = a_{31} = 0,$$

$$a_{12} = +p \cdot \frac{\pi_{66}}{2}.$$

In der Beobachtungsrichtung parallel K_2 erhält man aus dem Ovaloid für die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten der horizontal schwingenden Welle während der Belastung:

$$\omega_h^2 = a_{33},$$

vor der Belastung:

$$\omega_h^{02} = \omega_z^{02},$$

und für die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten der vertikal schwingenden Welle während der Belastung:

$$\omega_v^2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - a_{12},$$

vor der Belastung:

$$\omega_v^{02} = \frac{\omega_x^{02} + \omega_y^{02}}{2}.$$

Es ergeben sich so für die in (2') und (3') auftretenden Größen $\omega_h^{02} - \omega_h^2$ und $\omega_v^{02} - \omega_v^2$ die Werte:

$$\begin{aligned}\omega_h^{02} - \omega_h^2 &= \omega_v^{02} - a_{33} = p \left\{ \frac{\pi_{31} + \pi_{32}}{2} \right\}, \\ \omega_v^{02} - \omega_v^2 &= \frac{1}{2} \{ \omega_v^{02} + \omega_v^{02} - a_{11} - a_{22} + 2a_{12} \} \\ &= \frac{p}{4} \{ \pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{21} + \pi_{22} + 2\pi_{66} \}.\end{aligned}$$

Der durch Druck erzeugte Gangunterschied in Wellenlängen wird demnach:

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{A}'_{hv} &= \frac{1}{2\lambda} \left\{ \left[\frac{\pi_{31} + \pi_{32}}{2v^3} \right] \cdot n_s^{03} - \frac{1}{4} \left[\frac{\pi_{11}}{v^3} + \frac{\pi_{22}}{v^3} + \frac{\pi_{12}}{v^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\pi_{31}}{v^3} + \frac{2\pi_{66}}{v^3} \right] n_m^{03} \right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_s^0 - n_m^0}{\lambda} \right] \end{aligned} \right.$$

Hierin ist:

$$n_m^0 = \frac{n_s^0 + n_y^0}{2}.$$

Nimmt man für die Brechungsindizes n_m^0 und n_s^0 einen gemeinsamen Mittelwert n_m^0 an, so gilt in genügender Annäherung bei Vernachlässigung der Dickenänderung:

$$(28') \quad \bar{A}'_{hv} = \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{n_s^0}{2} \left\{ \frac{\pi_{31} + \pi_{32}}{v^3} - \frac{1}{2} \left[\frac{\pi_{11}}{v^3} + \frac{\pi_{22}}{v^3} + \frac{\pi_{31}}{v^3} + \frac{\pi_{22}}{v^3} + \frac{2\pi_{66}}{v^3} \right] \right\}$$

und da mit derselben Annäherung:

$$\frac{\pi_{31} - \pi_{11}}{v^3} = \frac{2\lambda}{n_m^0} \cdot \bar{A}_{sx},$$

$$\frac{\pi_{32} - \pi_{22}}{v^3} = \frac{2\lambda}{n_m^0} \cdot \bar{A}_{sy} \text{ usw.},$$

so wird:

$$(28'') \quad \frac{\pi_{66}}{v^3} = \frac{2\lambda}{n_m^0} \left\{ \bar{A}_{sx} + \bar{A}_{sy} - \frac{1}{2} (\bar{A}_{yx} + \bar{A}_{xy}) - 2\bar{A}'_{hv} \right\}.$$

Für n_m^0 kann ein mittlerer Brechungsindex, etwa n_y^0 gesetzt werden. Rechts stehen lauter durch die Beobachtung gefundene Größen; π_{66}/v^3 kann demnach allein durch Kompensatormessungen erhalten werden.

Die Anwendung der Formel (3') ergibt für die absoluten Verzögerungen Folgendes:

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta'_h &= \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\pi_{31} + \pi_{32}}{2v^3} \right\} n_s^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_s^0 - 1}{\lambda} \right], \\ \delta'_v &= \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{1}{4} \left\{ \frac{\pi_{11}}{v^3} + \frac{\pi_{22}}{v^3} + \frac{\pi_{12}}{v^3} + \frac{\pi_{31}}{v^3} + \frac{\pi_{22}}{v^3} + \frac{2\pi_{66}}{v^3} \right\} n_m^{03} \\ &\quad + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_m^0 - 1}{\lambda} \right]. \end{aligned} \right.$$

Prisma 5. Hier wirkt der Druck in der Y^0-Z^0 -Ebene. Die Druckrichtung ist unter einem Winkel von -45° gegen die Y^0 -Achse geneigt. Alsdann ergibt sich aus (7):

$$X_x = 0; \quad Y_y = Z_z = +\frac{p}{2}; \quad Y_z = -\frac{p}{2}; \quad Z_x = X_y = 0$$

und die Deformationsgrößen (6) reduzieren sich auf:

$$x_x = -\frac{p}{2} \{s_{12} + s_{13}\},$$

$$y_y = -\frac{p}{2} \{s_{22} + s_{23}\},$$

$$z_z = -\frac{p}{2} \{s_{23} + s_{33}\},$$

$$y_z = +\frac{p}{2} s_{44},$$

$$z_x = x_y = 0.$$

In der zur Druckrichtung senkrechten Beobachtungsrichtung parallel K_2 berechnet sich die Dickenänderung des Präparates aus der Größe des Druckes p und den Deformationsgrößen nach (8) folgendermaßen:

$$D - D^0 = D^0 \cdot \frac{1}{2} \{y_y + z_z + y_z\} = -D^0 \cdot p \cdot \frac{1}{4} \{s_{22} + 2s_{23} + s_{33} - s_{44}\} \\ = +D^0 \cdot p \cdot 0,783 \cdot 10^{-3}.$$

Die Gleichungen (5) werden für diese Druckrichtungen zu:

$$a_{11} - \omega_x^{02} = -p \left\{ \frac{\pi_{12} + \pi_{13}}{2} \right\},$$

$$a_{22} - \omega_y^{02} = -p \left\{ \frac{\pi_{22} + \pi_{23}}{2} \right\},$$

$$a_{33} - \omega_z^{02} = -p \left\{ \frac{\pi_{32} + \pi_{33}}{2} \right\},$$

$$a_{23} = +p \frac{\pi_{44}}{2},$$

$$a_{31} = a_{12} = 0.$$

Analog wie bei Prisma 4 berechnen sich aus dem Ovaloid für die Beobachtungsrichtung parallel K_2 die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten. Man erhält folgende Werte für die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten vor der Belastung:

$$\omega_h^{02} = \omega_s^{02}; \quad \omega_v^{02} = \frac{\omega_y^{02} + \omega_z^{02}}{2}$$

und für die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten während der Belastung:

$$\omega_h^2 = a_{11}; \quad \omega_v^2 = \frac{a_{22} + a_{33}}{2} - a_{23}.$$

ω_h ist die senkrecht zur Druckrichtung schwingende Welle und ω_v die parallel zur Druckrichtung schwingende. Die ganze Rechnung kommt auf eine zyklische Vertauschung der Indizes heraus. Der für die Richtung K_2 in Betracht kommende Gangunterschied ist gegeben durch:

$$(30) \left\{ \begin{aligned} \overline{\Delta}_{hv} &= \frac{1}{2\lambda} \left\{ \left[\frac{\pi_{12} + \pi_{13}}{2v^2} \right] n_z^{03} - \frac{1}{4} \left[\frac{\pi_{22} + \pi_{23} + \pi_{32} + \pi_{33} + 2\pi_{44}}{v^2} \right] \right. \\ &\quad \left. n_m^{03} \right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_z^0 - n_m^0}{\lambda} \right]. \end{aligned} \right.$$

Hierin ist

$$n_m^0 = \frac{n_y^0 + n_z^0}{2}$$

zu setzen.

Ferner ergibt sich entsprechend der Formel (28''):

$$(30') \quad \frac{\pi_{44}}{v^2} = \frac{2\lambda}{n_m^0} \{ \overline{\Delta}_{xy} + \overline{\Delta}_{xz} - \frac{1}{2} (\overline{\Delta}_{zy} + \overline{\Delta}_{yz}) - 2 \overline{\Delta}_{hv} \},$$

worin $n_m' = n_v^0$ gesetzt werden darf.

Für die absoluten Verzögerungen erhält man die Werte:

$$(31) \left\{ \begin{aligned} \overline{\delta}_h'' &= \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\pi_{12} + \pi_{13}}{2v^2} \right\} \cdot n_z^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_z^0 - 1}{\lambda} \right], \\ \overline{\delta}_v'' &= \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{\pi_{22} + \pi_{23} + \pi_{32} + \pi_{33} + 2\pi_{44}}{v^2} \right] \right\} n_m^{03} \\ &\quad + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_m^0 - 1}{\lambda} \right]. \end{aligned} \right.$$

Prisma 6. Die Druckrichtung ist in der X^0Z^0 -Ebene unter einem Winkel von -45° gegen die X^0 -Achse geneigt. Es wird daher:

$$X_x = + \frac{p}{2}; \quad Y_y = 0; \quad Z_z = + \frac{p}{2};$$

$$Y_z = 0; \quad Z_x = - \frac{p}{2}; \quad X_y = 0$$

und nach (6):

$$x_x = - \frac{p}{2} \{ s_{11} + s_{13} \},$$

$$y_y = - \frac{p}{2} \{ s_{12} + s_{23} \},$$

$$z_z = - \frac{p}{2} \{ s_{13} + s_{33} \},$$

$$y_x = x_y = 0,$$

$$z_x = + \frac{p}{2} \cdot s_{55}.$$

Für die Dickenänderung in der Beobachtungsrichtung parallel K_2 senkrecht zur Druckrichtung berechnet sich nach (8):

$$\begin{aligned} D - D^0 &= D^0 \cdot \frac{1}{2} \{z_x + z_y + z_z\} = -D^0 \cdot p \cdot \frac{1}{2} \{s_{11} + 2s_{12} + s_{33} - s_{55}\} \\ &= D^0 \cdot p \cdot 0,240 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Das System der Polarisationskonstanten reduziert sich auf:

$$\begin{aligned} a_{11} - \omega_x^{02} &= -p \left\{ \frac{\pi_{11} + \pi_{12}}{2} \right\}, \\ a_{22} - \omega_y^{02} &= -p \left\{ \frac{\pi_{21} + \pi_{22}}{2} \right\}, \\ a_{33} - \omega_z^{02} &= -p \left\{ \frac{\pi_{31} + \pi_{33}}{2} \right\}, \\ a_{23} = a_{12} &= 0; \quad a_{31} = +p \frac{\pi_{55}}{v^2}. \end{aligned}$$

Die in der Beobachtungsrichtung parallel K_2 liegenden Wellengeschwindigkeiten ω_h und ω_v werden wieder aus dem Ovaloid bestimmt. Für die absolute Verzögerung der horizontal schwingenden Welle erhält man alsdann:

$$(31) \quad \bar{\delta}_h''' = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \left[\frac{\pi_{21} + \pi_{22}}{2v^2} \right] n_y^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_y^0 - 1}{\lambda} \right] \right\}$$

und für die vertikal schwingende Welle:

$$\bar{\delta}_v''' = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{\pi_{31} + \pi_{33} + \pi_{11} + \pi_{12} + 12\pi_{55}}{v^2} \right] n_m^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \left[\frac{n_m^0 - 1}{\lambda} \right] \right\}.$$

Für n_m^0 kann hier

$$\frac{n_x^0 + n_y^0}{2}$$

gesetzt werden. Die Formel für die relative Verzögerung ist deshalb hier nicht mit angegeben, weil in dieser Beobachtungsrichtung keine Kompensatormessungen ausgeführt werden konnten.

d) Resultate der Beobachtungen.

Im folgenden werden die an den verschiedenen Topaspräparaten erhaltenen Werte der relativen und der absoluten Verzögerungen angegeben, und zwar sämtlich für $\lambda = 588 \mu\mu$. Um die Inhomogenität der Druckverteilung zu eliminieren, sind die Messungen je an beiden Rändern und in der Mitte des Präparates (L.Rd.; M.; R.Rd.) ausgeführt; das Mittel aus den Resultaten ist von der Inhomogenität im wesentlichen frei.

Prisma 1.

a) Beobachtungsrichtung $\parallel K_1 \parallel Y^\circ$.1. Relative Verzögerung für $\lambda = 588 \mu\mu$.

Belastung am Hebel (1:5)		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2742 g	1.	0,945	1,16	1,34	1,148 = Δ_1'
4113	2.	1,545	1,765	1,815	1,708
	3.	1,65	1,71	1,79	1,717
	4.	1,505	1,72	1,88	1,702
6855	5.	2,615	2,91	3,012	2,846 = Δ_5'

Hieraus berechnet sich nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\bar{\Delta}_{12} = \frac{\Delta_1' \cdot Q_1 + 3 \Delta_2' \cdot Q_2 + \Delta_3' \cdot Q_3}{Q_1^2 + 3 Q_2^2 + Q_3^2} \cdot \frac{3,692}{5 \cdot 9,72},$$

$$\bar{\Delta}_{12} = 0,3157 \cdot 10^{-4}.$$

Rückwärts berechnet sich dann:

$$\Delta_1' = 1,140,$$

$$\Delta_2' = 1,709,$$

$$\Delta_3' = 2,849.$$

2. Absolute Verzögerungen.

X-Schwingung.

Belastung am Hebel (1:9,7)		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g		- 0,022	- 0,021	- 0,018	- 0,020 ₈ = δ_x

Es ergibt sich demnach der Wert

$$\delta_x = \frac{\delta_x \cdot 3,692}{2436 \cdot 9,7},$$

$$\delta_x = - 0,0317 \cdot 10^{-4}.$$

Z-Schwingung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g	1.	0,223	0,163	0,125	0,170
(3fach. Gew.)	2.	0,178	0,178	0,178	0,178
	3.	0,175	0,173	0,161	0,170
	4.	0,201	0,173	0,138	0,171
					0,174 = δ_x'
2936 g	5.	0,271	0,215	0,152	0,213 = δ_x''

Nach der Methode der kleinsten Quadrate erhält man hier:

$$\bar{\delta}_z = \frac{\delta'_z \cdot Q_1 + \delta''_z \cdot Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2} \cdot \frac{3,692}{9,7},$$

$$\bar{\delta}_z = + 0,2744 \cdot 10^{-4}.$$

Aus diesem Wert erhält man rückwärts die Werte:

$$\delta'_z = 0,1756$$

$$\delta''_z = 0,212.$$

b) Beobachtungsrichtung $\parallel K_2 \parallel Z^0$.

1. Relative Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
1371 g	1.	0,318	0,643	0,954	0,638
	2.	0,359	0,772	0,894	0,675
	3.	0,466	0,695	0,748	0,648
2742	4.	1,42	1,36	1,13	1,303
	5.	1,125	1,345	1,445	1,305
	6.	1,14	1,325	1,42	1,295
7083	7.	3,24	3,375	3,465	3,360
	8.	3,47	3,375	3,215	3,353

Wegen zu ungleichförmiger Druckverteilung sollen die Messungen 1—3 zur weiteren Verrechnung nicht benutzt werden; ihr Mittelwert Δ_1' stimmt indessen mit den anderen Messungen ganz gut überein.

Die Methode der kleinsten Quadrate ergibt hier:

$$\bar{\Delta}_{yx} = \frac{\Delta_1' \cdot Q_1 + \Delta_2' \cdot Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2} \cdot \frac{3,710}{5 \cdot 9,72},$$

$$\bar{\Delta}_{yx} = 0,3619 \cdot 10^{-4}.$$

Rückwärts wird aus $\bar{\Delta}_{yx}$ berechnet:

$$\Delta_1' = 0,650,$$

$$\Delta_2' = 1,300,$$

$$\Delta_3' = 3,358.$$

2. Absolute Verzögerungen.

Y-Schwingung.

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g 1.	0,167	0,178	0,185	0,177 } $\delta_y = 0,176$ 0,174 }
2.	0,185	0,167	0,169	

Es folgt hieraus:

$$\delta_y = \frac{0,176 \cdot 3,710}{2436 \cdot 9,7}$$

$$\delta_y = + 0,2763 \cdot 10^{-4}$$

X-Schwingung.

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g 1.	- 0,054	- 0,050	- 0,064	- 0,056 } $\delta_x = - 0,056$ - 0,056 }
2.	- 0,063	- 0,054	- 0,052	

folglich wird:

$$\delta_x = - \frac{0,056 \cdot 3,710}{2436 \cdot 9,7}$$

$$\delta_x = - 0,0879 \cdot 10^{-4}$$

Prisma 2.

a) Beobachtungsrichtung $\parallel K_1 \parallel Z^0$.

Schon die Beobachtung im natürlichen Lichte zeigte einen schichtförmigen Aufbau des Präparates, der einem Fortwachsen des ursprünglichen Kristalles am Entstehungsorte durch schichtförmiges Ansetzen der Prismenflächen entsprach. Die Beobachtung parallel der Z^0 -Achse wurde dadurch erschwert; die Streifen im Kompensator waren teilweise recht undeutlich. Die Messung der absoluten Verzögerung konnte nicht ausgeführt werden.

Relative Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
(4471 g	1.	1,805	2,08	1,88	1,922 = Δ_1'
2956	2.	1,265	1,295	1,235	1,265
	3.	1,255	1,27	1,19	1,238
	4.	1,335	1,27	1,651	1,257
7083	5.	2,745	3,155	3,15	3,017
	6.	3,07	3,065	2,89	3,008
	7.	2,985	3,10	2,96	3,015

Δ_1' wird zur Berechnung von $\bar{\Delta}_{xy}$ nicht benutzt. Aus Δ_2' und Δ_3' folgt nach der Ausgleichsrechnung:

$$\bar{\Delta}_{xy} = \frac{\Delta_2' \cdot Q_2 + \Delta_3' \cdot Q_3}{Q_2^2 + Q_3^2} \cdot \frac{3,692}{5 \cdot 9,72},$$

$$\bar{\Delta}_{xy} = \delta_x - \delta_y = + 0,3290 \cdot 10^{-4}.$$

Daraus wird rückwärts:

$$(\Delta_1' = 1,901),$$

$$\Delta_2' = 1,257,$$

$$\Delta_3' = 3,011.$$

b) Beobachtungsrichtung $\parallel K_2 \parallel X^\circ$.

1. Relative Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2956 g	1.	1,06	1,12	1,155	1,112
	2.	1,205	1,155	0,985	1,115
	3.	0,955	1,10	1,26	1,105
7083	4.	2,475	2,715	2,92	2,703
	5.	2,905	2,77	2,44	2,705
	6.	2,605	2,76	2,72	2,695

Es ist demnach:

$$\bar{\Delta}_{xy} = \frac{\Delta_1' \cdot Q_1 + \Delta_2' \cdot Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2} \cdot \frac{3,708}{5 \cdot 9,72},$$

$$\bar{\Delta}_{xy} = \delta_x - \delta_y = 0,2903 \cdot 10^{-4}$$

und daraus ergibt sich wieder:

$$\Delta_1' = 1,125,$$

$$\Delta_2' = 2,695.$$

2. Absolute Verzögerungen.

Z-Schwingung.

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g 1.	0,158	0,125	0,143	0,142
2.	0,141	0,145	0,142	0,143
3.	0,150	0,141	0,132	0,141
4.	0,156	0,142	0,132	0,143

$$0,142 = \delta_z$$

Daraus berechnet sich:

$$\delta_z = \frac{0,142 \cdot 3,708}{2436 \cdot 9,7},$$

$$\delta_z = + 0,2228 \cdot 10^{-4}.$$

Y-Schwingung.

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g 2.	- 0,041	- 0,042	- 0,040	- 0,041
4.	- 0,043	- 0,047	- 0,047	- 0,046

$$- 0,0435 = \delta_y$$

Folglich:

$$\delta_y = - 0,068_3 \cdot 10^{-4}.$$

Prisma 3.

a) Beobachtungsrichtung $\parallel K_1 \parallel X^\circ$.

1. Relative Verzögerung.

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
4471 g 1.	1,40	1,50	1,515	1,471 = A_1'
7083 2.	2,265	2,36	2,36	2,328
3.	2,27	2,37	2,375	2,338
4.	2,19	2,36	2,445	2,333

$$2,333 = A_2'$$

Die Methode der kleinsten Quadrate ergibt:

$$\bar{A}_{y1} = \frac{A_1 \cdot Q_1 + 3 A_2 \cdot Q_2}{Q_1^2 + 3 Q_2^2} \cdot \frac{3,709}{8 \cdot 9,72},$$

$$\bar{A}_{y1} = + 0,2507 \cdot 10^{-4}.$$

Rückwärts berechnet sich:

$$\Delta_1' = 1,469.$$

$$\Delta_2' = 2,326.$$

2. Absolute Verzögerungen.

Y-Schwingung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g	1.	0,126	0,123	0,092	0,114
	2.	0,153	0,121	0,079	0,118
	3.	0,127	0,115	0,120	0,121
	4.	0,117	0,109	0,092	0,106
	5.	0,121	0,100	0,081	0,101
	6.	0,098	0,107	0,116	0,107
3936	7.	0,178	0,163	0,178	0,173 = δ_u''

Es berechnet sich, wiederum nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\delta_y = + 0,1724 \cdot 10^{-4}.$$

Z-Schwingung.

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
3936 g	1. - 0,078	- 0,081	- 0,079	- 0,079
2. - 0,080	- 0,081	- 0,078	- 0,080	$\delta_z = - 0,0795$

Es wird demnach:

$$\delta_z = + \frac{\delta_z \cdot 3,709}{3936 \cdot 9,7},$$

$$\delta_z = - 0,0772 \cdot 10^{-4}.$$

b) Beobachtungsrichtung $\parallel K_z \parallel Y^0$.

1. Relative Verzögerung.

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
4471 g 1.	1,23	1,43	1,565	1,409
2.	1,395	1,50	1,335	1,410
3.	1,39	1,415	1,42	1,408
4.	1,345	1,425	1,42	1,397
5.	1,39	1,44	1,405	1,412

$\left. \begin{array}{l} 1,409 \\ 1,410 \\ 1,408 \\ 1,397 \\ 1,412 \end{array} \right\} \Delta' = 1,407$

Es wird:

$$\overline{\Delta_{xx}} = \frac{1,407 \cdot 3,702}{4471 \cdot 5 \cdot 9,72},$$

$$\overline{\Delta_{xx}} = \delta_x - \delta_z = + 0,2396 \cdot 10^{-4}.$$

2. Absolute Verzögerungen.

X-Schwingung.

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
3936 g	1.	0,112	0,129	0,218
	2.	0,158	0,167	0,134
	3.	0,157	0,157	0,152
				0,153 } $\delta_x = 0,154$ 0,153 } 0,155 }

Aus δ_x berechnet sich:

$$\delta_x = \frac{0,154 \cdot 3,702}{3936 \cdot 9,7},$$

$$\delta_x = + 0,1493 \cdot 10^{-4}.$$

Z-Schwingung.

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
3936 g	- 0,091	- 0,090	- 0,078	- 0,086 = δ_z

Hiernach wird:

$$\delta_z = \frac{- 0,086 \cdot 3,702}{3936 \cdot 9,7},$$

$$\delta_z = - 0,0834 \cdot 10^{-4}.$$

Prisma 4.

Beobachtungsrichtung $\parallel K_1$.

1. Relative Verzögerung.

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
3471 g	1.	1,255	1,275	1,125
4471	2.	1,585	1,56	1,505
	3.	1,415	1,57	1,64
				1,218 = Δ_1' 1,550 } $1,546 = \Delta_2'$ 1,542 }

Die Methode der kleinsten Quadrate ergibt hier:

$$\overline{A_{hv}} = \frac{A_1' \cdot Q_1 + A_2' \cdot Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2} = \frac{3,689}{5 \cdot 9,72},$$

$$\overline{A_{hv}} = \overline{\delta_h'} - \overline{\delta_v'} = + 0,2639 \cdot 10^{-4}.$$

Rückwärts erhält man:

$$A_1' = 1,207$$

$$A_2' = 1,555.$$

2. Absolute Verzögerung.

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g 1.	0,117	0,115	0,116	0,116 } $\delta_h' = 0,116$
2.	0,124	0,113	0,114	

Daraus wird:

$$\overline{\delta_h'} = \frac{0,116 \cdot 3,689}{2436 \cdot 9,7},$$

$$\overline{\delta_h'} = + 0,1811 \cdot 10^{-4}.$$

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g 1.	- 0,058	- 0,052	- 0,048	- 0,053 } $\delta_v' = - 0,045$
2.	- 0,042	- 0,039	- 0,031	

Daraus folgt:

$$\overline{\delta_v'} = - \frac{0,045 \cdot 3,689}{2436 \cdot 9,7},$$

$$\overline{\delta_v'} = - 0,044 \cdot 10^{-4}.$$

Dieser Wert ist sehr unsicher. Aus $\overline{\delta_h'}$ und $\overline{A_{hv}}$ würde folgen:

$$\overline{\delta_v'} = - 0,083 \cdot 10^{-4}.$$

Prisma 5.

Beobachtungsrichtung $\parallel K_2$.

1. Relative Verzögerung.

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
4471 g 1.	1,60	1,77	1,91	1,760 } $\Delta_{hv}'' = 1,739$
2.	1,705	1,74	1,74	
3.	1,555	1,74	1,89	

Demnach wird:

$$\overline{d_{hv}}'' = \frac{1,789 \cdot 3,698}{4471 \cdot 5 \cdot 9,72},$$

$$\overline{d_{hv}}'' = + 0,2960 \cdot 10^{-4}.$$

2. Absolute Verzögerungen.

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g 1.	0,108	0,109	0,112	0,110 } $\delta_h'' = + 0,115$
2.	0,126	0,120	0,114	

Aus δ_h'' berechnet sich:

$$\overline{\delta_h}'' = \frac{0,115 \cdot 3,698}{2436 \cdot 9,7},$$

$$\overline{\delta_h}'' = + 0,1800 \cdot 10^{-4}.$$

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g 1.	- 0,064	- 0,064	- 0,072	- 0,067 = δ_v''
2.				

Es wird demnach:

$$\overline{\delta_v}'' = - \frac{0,067 \cdot 3,698}{2436 \cdot 9,7},$$

$$\overline{\delta_v}'' = - 0,105 \cdot 10^{-4}.$$

Prisma 6.

An diesem Prisma wurden in der Beobachtungsrichtung parallel K_2 nur Messungen der absoluten Verzögerungen vorgenommen, da die der relativen Verzögerungen infolge zu undeutlicher Streifen im Kompensator zu unsicher waren.

Absolute Verzögerungen.

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g 1.	0,110	0,113	0,107	0,110 } $\delta_h''' = + 0,112$
2.	0,112	0,121	0,110	

Daraus folgt:

$$\delta_h''' = \frac{0,112 \cdot 3,692}{2436 \cdot 9,7},$$

$$\delta_h''' = + 0,1750 \cdot 10^{-4}.$$

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g 1.	- 0,027	- 0,032	- 0,033	- 0,031
2.	- 0,028	- 0,031	- 0,034	- 0,031

Es folgt:

$$\delta_v''' = - \frac{0,031 \cdot 3,692}{2436 \cdot 9,7},$$

$$\delta_v''' = - 0,0484 \cdot 10^{-4}.$$

e) Berechnung der Konstanten und Prüfung der Theorie
bzw. der Messungen.

Setzt man in die Formeln (16—31) die aus den Beobachtungen gewonnenen Resultate ein, so erhält man die piezo-optischen Konstanten oder Kombinationen derselben. Wird jeder Beobachtung ein ihrer Zuverlässigkeit entsprechendes Gewicht erteilt, so berechnen sich nach der Methode der kleinsten Quadrate für die piezo-optischen Konstanten π_{hk} des Topases folgende Werte:

$$\pi_{11} = - 0,504 \cdot 10^{-8} \cdot v^2; \quad \pi_{12} = + 0,320 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$

$$\pi_{13} = + 0,222 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$

$$\pi_{21} = + 0,511 \cdot 10^{-8} \cdot v^2; \quad \pi_{22} = - 0,583 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$

$$\pi_{23} = + 0,246 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$

$$\pi_{31} = + 0,369 \cdot 10^{-8} \cdot v^2; \quad \pi_{32} = + 0,218 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$

$$\pi_{33} = - 0,447 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$

$$\pi_{44} = - 0,836 \cdot 10^{-8} \cdot v^2; \quad \pi_{55} = - 0,229 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$

$$\pi_{66} = - 0,736 \cdot 10^{-8} \cdot v^2.$$

Die Beziehungen (10) ergeben dann für die elastooptischen Konstanten des Topases folgendes Wertsystem:

$$p_{11} = - 0,085 \cdot v^2; \quad p_{21} = + 0,093 \cdot v^2; \quad p_{31} = + 0,095 \cdot v^2;$$

$$p_{12} = + 0,069 \cdot v^2; \quad p_{22} = - 0,120 \cdot v^2; \quad p_{32} = + 0,085 \cdot v^2;$$

$$p_{13} = + 0,052 \cdot v^2; \quad p_{23} = + 0,065 \cdot v^2; \quad p_{33} = - 0,083 \cdot v^2$$

$$p_{44} = - 0,095 \cdot v^2; \quad p_{55} = - 0,031 \cdot v^2; \quad p_{66} = - 0,098 \cdot v^2.$$

Aus den so gefundenen Werten der piezooptischen Konstanten kann man umgekehrt mit Hilfe der Gleichungen (16 bis 31) die relativen und absoluten Verzögerungen in den speziellen Fällen der Beobachtung berechnen. Die auf diese Weise gefundenen Werte werden in der nachstehenden Tabelle angegeben, wobei neben jeder berechneten Größe zugleich die beobachtete Größe gestellt wird.

Relative u. absolut. Verzög.	Berechnet	Beobachtet	Relative u. absolut. Verzög.	Berechnet	Beobachtet
$\overline{\Delta_{xx}}$	$+0,316 \cdot 10^{-4}$	$+0,316 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_z}$	$-0,073 \cdot 10^{-4}$	$-0,077 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_x}$	$-0,039 \cdot 10^{-4}$	$-0,032 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\Delta_{xz}}$	$+0,240 \cdot 10^{-4}$	$+0,240 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_z}$	$+0,277 \cdot 10^{-4}$	$+0,274 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_x}$	$+0,147 \cdot 10^{-4}$	$+0,149 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\Delta_{yz}}$	$+0,363 \cdot 10^{-4}$	$+0,362 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_z}$	$-0,093 \cdot 10^{-4}$	$-0,083 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_y}$	$+0,271 \cdot 10^{-4}$	$+0,276 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\Delta_{yv'}}$	$+0,262 \cdot 10^{-4}$	$+0,264 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_x}$	$-0,093 \cdot 10^{-4}$	$-0,088 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_h'}$	$+0,170 \cdot 10^{-4}$	$+0,181 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\Delta_{xy}}$	$+0,323 \cdot 10^{-4}$	$+0,323 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_v'}$	$-0,092 \cdot 10^{-4}$	$-0,044 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\Delta_{zy}}$	$+0,291 \cdot 10^{-4}$	$+0,290 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\Delta_{hv''}}$	$+0,298 \cdot 10^{-4}$	$+0,296 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_z}$	$+0,222 \cdot 10^{-4}$	$+0,223 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_h''}$	$+0,178 \cdot 10^{-4}$	$+0,180 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_y}$	$-0,068 \cdot 10^{-4}$	$-0,068 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_v''}$	$-0,120 \cdot 10^{-4}$	$-0,105 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\Delta_{yz}}$	$+0,250 \cdot 10^{-4}$	$+0,251 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_h'''}$	$+0,161 \cdot 10^{-4}$	$+0,175 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_y}$	$+0,176 \cdot 10^{-4}$	$+0,172 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_v'''}$	$-0,048 \cdot 10^{-4}$	$-0,048 \cdot 10^{-4}$

In den meisten Fällen liegt die Differenz zwischen der berechneten und der beobachteten Größe noch innerhalb der Fehlergrenze der optischen Beobachtungsmethoden. Infolge der negativen Vorzeichen der π_{hh} waren die beobachteten absoluten Verzögerungen außerordentlich klein, so daß die Genauigkeit der π_{hk} nur einige Prozent betragen kann. Immerhin ist eine befriedigende Übereinstimmung mit dem Ansatz von Pockels erzielt worden. Die Genauigkeit der p_{hk} ist übrigens infolge der Art ihrer Berechnung aus den π_{hk} eine entsprechend geringe.

Ebenso wie bei den bisher untersuchten Kristallen besteht auch bei Topas eine Beziehung $\pi_{hk} = \pi_{kh}$ oder $p_{hk} = p_{kh}$ nicht.

Das negative Vorzeichen sämtlicher π_{hh} sowie p_{hh} verleiht dem piezooptischen Verhalten des Topases ein eigenartiges

Gepräge, wie ja schon unter den vorliegenden Beobachtungen in jeder Beobachtungsrichtung negative Verzögerungen, d.h. Beschleunigungen, gemessen wurden. In einigen speziellen Fällen soll die Einwirkung dieses Vorzeichens noch näher ausgeführt werden.

Die Größenordnung der Konstanten ist durchweg dieselbe.

f) Anwendung der gefundenen Resultate auf spezielle Fälle.

Zunächst soll das *piezooptische Verhalten des Topases für den Fall allseitig gleichen Druckes* diskutiert werden. Hierbei wird¹

$$p = X_x = Y_y = Z_z; \quad Y_x = Z_x = X_y = 0$$

und die Gleichungen der Polarisationskonstanten ergeben:

$$\omega_x^2 - \omega_x^{02} = -p \{ \pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{13} \},$$

$$\omega_y^2 - \omega_y^{02} = -p \{ \pi_{21} + \pi_{22} + \pi_{23} \},$$

$$\omega_z^2 - \omega_z^{02} = -p \{ \pi_{31} + \pi_{32} + \pi_{33} \}$$

oder nach Einsetzen der Zahlwerte für die π_{hk}

$$\omega_x^2 - \omega_x^{02} = -0,088 \cdot 10^{-8} \cdot v^2 \cdot p,$$

$$\omega_y^2 - \omega_y^{02} = -0,174 \cdot 10^{-8} \cdot v^2 \cdot p,$$

$$\omega_z^2 - \omega_z^{02} = -0,140 \cdot 10^{-8} \cdot v^2 \cdot p.$$

Durch allseitig gleichen Druck erleiden demnach sämtliche Hauptlichtgeschwindigkeiten geringe Verzögerungen, oder was dasselbe ist: Die Hauptbrechungsindizes werden bei allseitig gleichem Druck zunehmen, durch allseitig gleichen Zug abnehmen. Die Änderung der Doppelbrechung durch allseitig gleichen Druck ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} \omega_x^2 - \omega_z^2 - (\omega_x^{02} - \omega_z^{02}) &= -p (\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{13} - \pi_{31} - \pi_{32} - \pi_{33}) \\ &= +0,102 \cdot 10^{-8} \cdot v^2 \cdot p. \end{aligned}$$

Man erhält eine geringe Zunahme derselben:

$$n_x - n_z - (n_x^0 - n_z^0) = + \frac{n_m^3}{2} \cdot 0,102 \cdot 10^{-8} \cdot p = +0,215 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Die Größe des halben Winkels der optischen Achsen wird dargestellt durch:

$$\sin \Omega = \sqrt{\frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{\omega_x^2 - \omega_z^2}}.$$

Da nun für Topas gilt

$$\omega_x^2 - \omega_y^2 = \omega_x^{02} - \omega_y^{02} + 0,186 \cdot 10^{-8} \cdot v^2 \cdot p,$$

$$\omega_x^2 - \omega_z^2 = \omega_x^{02} - \omega_z^{02} + 0,102 \cdot 10^{-8} \cdot v^2 \cdot p,$$

so wird durch allseitig gleichen Druck der Winkel Ω vergrößert.

Eine weitere Anwendung der erhaltenen Resultate läßt sich auf *die Änderung der Brechungsindizes des Topases durch Erwärmung* machen. Nach Offret¹⁾ wird die Änderung der Brechungsindizes des Topases durch Temperaturerhöhung um 1°:

$$\frac{dn_x}{dt} = +0,81 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{dn_y}{dt} = +0,90 \cdot 10^{-5},$$

$$\frac{dn_z}{dt} = +0,80 \cdot 10^{-5}.$$

Da bei Temperaturerhöhung der Topas eine allseitige Dilatation erfährt, diese Dilatation aber allein gemäß dem piezooptischen Verhalten des Topases eine Abnahme der Brechungsindizes hervorruft, vorstehende Werte aber eine Zunahme derselben angeben, so folgt hieraus, daß dieser Unterschied durch einen reinen Temperatureinfluß auf das optische Verhalten des Topases, der den piezooptischen Veränderungen entgegenwirkt und dieselben überkompensiert, hervorgerufen wird.

Bei gleichförmiger Erwärmung um 1° C. ist nach Fizeau zu setzen:

$$x_x = +4,84 \cdot 10^{-6} = a_1,$$

$$y_y = +4,14 \cdot 10^{-6} = a_2,$$

$$z_z = +5,92 \cdot 10^{-6} = a_3.$$

Die Änderung des optischen Verhaltens allein durch diese thermische Dilatation würde gegeben sein durch:

$$\omega_x^2 - \omega_x^{02} = p_{11} \cdot a_1 + p_{12} \cdot a_2 + p_{13} \cdot a_3,$$

$$\omega_y^2 - \omega_y^{02} = p_{21} \cdot a_1 + p_{22} \cdot a_2 + p_{23} \cdot a_3,$$

$$\omega_z^2 - \omega_z^{02} = p_{31} \cdot a_1 + p_{32} \cdot a_2 + p_{33} \cdot a_3,$$

oder nach Einsetzung der Zahlwerte durch:

$$\omega_x^2 - \omega_x^{02} = +0,182 \cdot 10^{-6} \cdot v^2,$$

$$\omega_y^2 - \omega_y^{02} = +0,338 \cdot 10^{-6} \cdot v^2,$$

$$\omega_z^2 - \omega_z^{02} = +0,320 \cdot 10^{-6} \cdot v^2.$$

1) A. Offret, Bull. soc. franç. min. 18. 1890.

Die Änderung der Brechungsindizes wird demnach:

$$\left(\frac{dn_x}{dt}\right) = -0,381 \cdot 10^{-6}; \quad \left(\frac{dn_y}{dt}\right) = -0,713 \cdot 10^{-6};$$

$$\left(\frac{dn_z}{dt}\right) = -0,684 \cdot 10^{-6}.$$

Aus diesen Werten berechnet sich in Verbindung mit den von Offret erhaltenen für den reinen Temperatureinfluß folgendes:

$$\frac{\partial n_x}{\partial t} = +0,85 \cdot 10^{-5}; \quad \frac{\partial n_y}{\partial t} = +0,97 \cdot 10^{-5}; \quad \frac{\partial n_z}{\partial t} = +0,87 \cdot 10^{-5}.$$

Der reine Temperatureinfluß überwiegt also sehr stark den der thermischen Dilatation, so daß die letztere in ihrem Einfluß auf die Änderung der Brechungsindizes nur in einer kleinen Verminderung der Wirkung zur Geltung kommt.

Bei Erwärmung des Topases erhält man allein durch die Dilatation eine Abnahme der Doppelbrechung:

$$\left(\frac{d(n_x - n_z)}{dt}\right) = -0,803 \cdot 10^{-6},$$

durch reinen Temperatureinfluß eine Zunahme derselben:

$$\frac{\partial (n_x - n_z)}{\partial t} = +0,2 \cdot 10^{-6},$$

nach der Beobachtung von Offret dagegen eine Abnahme der Doppelbrechung; also überwiegt auch in Hinblick auf die Änderung der Doppelbrechung die thermische Dilatation.

Im folgenden soll die *Einwirkung einseitigen Druckes* auf die Änderung des optischen Verhaltens des Topases des Näheren diskutiert werden. Der Druck wirke z. B. in der X^0 - Y^0 -Ebene. Die Richtung des Druckes sei unter einem Winkel φ gegen die X^0 -Achse geneigt. Alsdann erhält man für die Polarisationskonstanten folgende Ausdrücke:

$$a_{11} = \omega_x^{02} - \{\pi_{11} \cdot \cos^2 \varphi + \pi_{12} \cdot \sin^2 \varphi\} \cdot p$$

$$a_{22} = \omega_y^{02} - \{\pi_{21} \cdot \cos^2 \varphi + \pi_{22} \cdot \sin^2 \varphi\} \cdot p$$

$$a_{33} = \omega_z^{02} - \{\pi_{31} \cdot \cos^2 \varphi + \pi_{32} \cdot \sin^2 \varphi\} \cdot p$$

$$a_{12} = -\frac{\pi_{21}}{2} \cdot \sin(2\varphi) \cdot p; \quad a_{23} = a_{31} = 0.$$

Wie diese Größen sich mit der Richtung des Druckes ändern, zeigt folgende Tabelle, in der dieselben für den ersten Quadranten der X^0 - Y^0 -Ebene für verschiedene Druckrichtungen berechnet sind.

φ	$\frac{a_{11} - \omega_x^{02}}{p \cdot r^2}$	$\frac{a_{22} - \omega_y^{02}}{p \cdot r^2}$	$\frac{a_{33} - \omega_z^{02}}{p \cdot r^2}$	$\frac{a_{12}}{p \cdot r^2}$
0°	$+ 0,504 \cdot 10^{-8}$	$- 0,511 \cdot 10^{-8}$	$- 0,369 \cdot 10^{-8}$	0
10°	$+ 0,479 \cdot 10^{-8}$	$- 0,478 \cdot 10^{-8}$	$- 0,365 \cdot 10^{-8}$	$+ 0,126 \cdot 10^{-8}$
20°	$+ 0,408 \cdot 10^{-8}$	$- 0,383 \cdot 10^{-8}$	$- 0,351 \cdot 10^{-8}$	$+ 0,237 \cdot 10^{-8}$
30°	$+ 0,298 \cdot 10^{-8}$	$- 0,238 \cdot 10^{-8}$	$- 0,330 \cdot 10^{-8}$	$+ 0,320 \cdot 10^{-8}$
40°	$+ 0,164 \cdot 10^{-8}$	$- 0,059 \cdot 10^{-8}$	$- 0,307 \cdot 10^{-8}$	$+ 0,362 \cdot 10^{-8}$
45°	$+ 0,092 \cdot 10^{-8}$	$+ 0,036 \cdot 10^{-8}$	$- 0,294 \cdot 10^{-8}$	$+ 0,369 \cdot 10^{-8}$
50°	$+ 0,020 \cdot 10^{-8}$	$+ 0,131 \cdot 10^{-8}$	$- 0,280 \cdot 10^{-8}$	$+ 0,362 \cdot 10^{-8}$
60°	$- 0,114 \cdot 10^{-8}$	$+ 0,310 \cdot 10^{-8}$	$- 0,256 \cdot 10^{-8}$	$+ 0,320 \cdot 10^{-8}$
70°	$- 0,224 \cdot 10^{-8}$	$+ 0,455 \cdot 10^{-8}$	$- 0,236 \cdot 10^{-8}$	$+ 0,237 \cdot 10^{-8}$
80°	$- 0,295 \cdot 10^{-8}$	$+ 0,550 \cdot 10^{-8}$	$- 0,223 \cdot 10^{-8}$	$+ 0,126 \cdot 10^{-8}$
90°	$- 0,320 \cdot 10^{-8}$	$+ 0,583 \cdot 10^{-8}$	$- 0,218 \cdot 10^{-8}$	0

Es genügt die Angabe für den ersten Quadranten, weil infolge der Symmetrie des Kristalles im dritten Quadranten die Werte sich in derselben Reihenfolge, im zweiten und vierten Quadranten in umgekehrter Reihenfolge wiederholen.

Die Änderungen der Hauptlichtgeschwindigkeiten lassen sich nun aus den Polarisationskonstanten berechnen. Es kann hier mit genügender Annäherung $a_{11} = \omega_x^2$, $a_{22} = \omega_y^2$ gesetzt werden; denn die Drehung des Achsensystems um die Z^0 -Achse ist eine außerordentlich geringe. Ferner wird $a_{33} = \omega_z^2$.

Es lassen sich leicht folgende Resultate übersehen: Für $\varphi = 0^\circ$ wird $\omega_x^2 - \omega_x^{02}$ positiv:

$$\frac{\omega_x^2 - \omega_x^{02}}{r^2} = 0,504 \cdot 10^{-8} \cdot p,$$

oder:

$$n_x - n_x^0 = -\frac{n_x^{03}}{2} \cdot 0,504 \cdot 10^{-8} \cdot p = -1,056 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Durch einseitigen Druck parallel der X^0 -Achse wird also n_x kleiner, d. h. ω_x erfährt eine Beschleunigung. Bei wachsendem Winkel φ nimmt diese Beschleunigung ab. Sie wird schließlich bei einem Winkel von etwa $51\frac{1}{2}^\circ$ Null und geht dann zu

negativen Werten über, bis bei $\varphi = 90^\circ$ die größte Verzögerung erreicht ist. Hier wird:

$$\frac{\omega_z^2 - \omega_x^2}{v^2} = -0,320 \cdot 10^{-8} \cdot p,$$

oder:

$$n_x - n_x^0 = + \frac{n_z^0}{2} \cdot 0,320 \cdot 10^{-8} \cdot p = + 0,671 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Ein ähnliches Verhalten nur in umgekehrter Reihenfolge zeigt die Änderung von ω_y^0 bzw. n_y^0 bei Variation der Druckrichtung in der X^0Y^0 -Ebene.

Bei $\varphi = 0^\circ$ erleidet ω_y^0 eine Verzögerung, d. h. n_y^0 wird größer. Diese Verzögerung nimmt bei anwachsendem φ ab, wird bei einem Winkel von ungefähr $45^\circ = 0$ und nimmt dann entgegengesetztes Vorzeichen an.

Für $\varphi = 0^\circ$ wird:

$$\frac{\omega_y^2 - \omega_z^2}{v^2} = \frac{\pi_{21}}{v^2} \cdot p,$$

oder:

$$n_y - n_y^0 = \frac{n_z^0}{2} \cdot 0,511 \cdot 10^{-8} \cdot p = + 1,078 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Für $\varphi = 90^\circ$ wird:

$$\frac{\omega_y^2 - \omega_z^2}{v^2} = \frac{\pi_{22}}{v^2} \cdot p,$$

oder:

$$n_y - n_y^0 = - \frac{n_z^0}{2} \cdot 0,583 \cdot 10^{-8} \cdot p = - 1,23 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Ferner wird für $\varphi = 0^\circ$, also für einseitigen Druck parallel der X^0 -Achse, die Doppelbrechung:

$$n_y - n_x - (n_y^0 - n_x^0) = - \frac{n_z^0}{2} \left(\frac{\pi_{11} - \pi_{21}}{v^2} \right) \cdot p = + 2,16 \cdot 10^{-8} \cdot p$$

und

$$n_x - n_z - (n_x^0 - n_z^0) = - \frac{n_z^0}{2} \left(\frac{\pi_{11} - \pi_{21}}{v^2} \right) \cdot p = + 1,73 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

In dem Ausdruck für:

$$\sin \Omega = \sqrt{\frac{n_y - n_x}{n_x - n_z}}$$

nimmt der Zähler um einen größeren Betrag zu als der Nenner, infolgedessen wird auch der Binormalenwinkel bei dieser Druckrichtung etwas größer.

Für einseitigen Druck parallel der Y^0 -Achse, d. h. für $\varphi = 90^\circ$, erhält man dagegen:

$$n_y - n_x - (n_y^0 - n_x^0) = -\frac{n_m^3}{2} \left(\frac{\pi_{12} - \pi_{21}}{\varphi^2} \right) \cdot p = -1,905 \cdot 10^{-8} \cdot p$$

und

$$n_z - n_x - (n_z^0 - n_x^0) = -\frac{n_m^3}{2} \left(\frac{\pi_{12} - \pi_{21}}{\varphi^2} \right) \cdot p = -0,212 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Hier nimmt in dem Ausdruck für $\sin \Omega$ der Zähler um einen größeren Betrag ab als der Nenner, d. h. bei dieser Druckrichtung wird der Binormalenwinkel etwas kleiner. Ferner sieht man, daß bei einem Winkel von etwa 47° die mechanisch erzeugte Doppelbrechung $n_y - n_x - (n_y^0 - n_x^0) = 0$ wird. Bei dieser Druckrichtung findet also keine Einwirkung auf den Binormalenwinkel statt.

Erwähnen will ich noch, daß bei einer Druckrichtung von 45° gegen die X^0 -Achse und einer Beobachtungsrichtung parallel der Z^0 -Achse, die Kompensatormessungen, die von $n_y - n_x - (n_y^0 - n_x^0)$ abhängen, sehr unsicher waren. Gerade zwischen 40° und 50° schwankt diese Doppelbrechung außerordentlich stark. An den oberen und unteren Rändern des Präparates, an denen sich selten eine genau definierte Druckrichtung herstellen läßt, teilten sich bei Belastung zuweilen die schwarzen Kompensatorstreifen gabelförmig, entsprechend dem verschiedenen Vorzeichen der Doppelbrechung bei Druckrichtungen zwischen 40° und 50° . An Stellen in der Mitte des Präparates, wo eine gleichmäßigere Druckverteilung vorhanden war, war die Verschiebung des schwarzen Kompensatorstreifens außerordentlich gering, so daß auf eine genaue Messung dieser Verschiebung verzichtet wurde.

Wirkt der Druck parallel der X^0 -Achse, ist also $\varphi = 0^\circ$, so wird für die Doppelbrechung $n_z - n_x - (n_z^0 - n_x^0)$ folgender Ausdruck erhalten:

$$n_z - n_x - (n_z^0 - n_x^0) = -\frac{n_m^3}{2} \left(\frac{\pi_{11} - \pi_{31}}{\varphi^2} \right) \cdot p = +1,73 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Die Doppelbrechung des Topases erfährt also bei einseitigem Druck parallel der X^0 -Achse eine geringe Zunahme. Umgekehrt ist es wieder bei einseitigem Druck parallel der Y^0 -Achse. Hier erhält man:

$$n_z - n_x - (n_z^0 - n_x^0) = -\frac{n_m^3}{2} \left(\frac{\pi_{12} - \pi_{21}}{\varphi^2} \right) \cdot p = -0,212 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Die Doppelbrechung des Topases erfährt bei einseitigem Druck parallel Y^0 eine geringe Abnahme.

Bei Druckrichtungen zwischen 0^0 und 90^0 nimmt die Doppelbrechung für wachsende φ ab, wird bei etwa $70^0 = 0$ und nimmt dann negative Werte an.

Dieses eigenartige Oszillieren der mechanisch erzeugten Lichtgeschwindigkeiten bei Variationen des Druckes hat seinen Grund in dem negativen Vorzeichen der π_{ab} . Diese geben auch zu ganz ähnlichen Verhältnissen in der Y^0-Z^0 - und Z^0-X^0 -Ebene Veranlassung. Es werden dort dieselben Resultate erhalten, nur mit etwas anderen Zahlenwerten.

Speziell für einseitigen Druck parallel der Z^0 -Achse mag noch der Wert für die mechanisch erzeugte Doppelbrechung angeführt werden. Man erhält:

$$n_z - n_x - (n_z^0 - n_x^0) = -\frac{n_m^3}{2} \left(\frac{\pi_{11} - \pi_{33}}{v^2} \right) \cdot p = -1,44 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Sie nimmt bei dieser Druckrichtung etwas ab.

g) Über die Dispersion der mechanisch erzeugten Lichtgeschwindigkeiten.

Es wurden in einigen Richtungen noch Beobachtungen über die Abhängigkeit der durch Druck erzeugten Verzögerung von der Farbe gemacht. Dieselben wurden in folgender Weise ausgeführt. An einer Stelle des Präparates wurden nacheinander die Verschiebungen des Kompensatorstreifens bzw. des Interferenzstreifens des Refraktors mit den verschiedenen Wellenlängen

$$\lambda = 668 \mu\mu, 588 \mu\mu, 502 \mu\mu \text{ und } 447 \mu\mu$$

gemessen. Zugleich wurde geprüft, ob die Druckverteilung an dieser Stelle während der Beobachtungsreihe dieselbe blieb. Da die Annahme der Proportionalität zwischen Druck und erzeugter Verzögerung zulässig ist, so hat man hiermit die Abhängigkeit zwischen den durch die verschiedenen Wellenlängen hervorgerufenen Verzögerungen gefunden. Die für $\lambda = 588 \mu\mu$ gefundenen Werte sind schon genauer bestimmt worden. Auf diese lassen sich dann die für die anderen Wellenlängen reduzieren.

An Prisma 3 wurden in der Beobachtungsrichtung parallel X^0 folgende Kompensatormessungen erhalten:

λ	Δ'	Kontrolle	$\overline{\Delta}_{yz}$
668 $\mu\mu$	1,434	1,436	$0,2117 \cdot 10^{-4}$
588 $\mu\mu$	1,484	$\begin{Bmatrix} 1,480 \\ 1,481 \end{Bmatrix}$	$0,2507 \cdot 10^{-4}$
502 $\mu\mu$	1,505	1,510	$0,3041 \cdot 10^{-4}$
447 $\mu\mu$	1,529		$0,3524 \cdot 10^{-4}$

Es läßt sich hieraus in genügender Annäherung nach der Formel:

$$2\lambda \cdot \overline{\Delta}_{yz} = \frac{\pi_{23} - \pi_{33}}{r^2} \cdot n_m^{0,3}$$

unter Vernachlässigung der Dickenänderung die Differenz $\frac{\pi_{23} - \pi_{33}}{r^2}$ für die verschiedenen Wellenlängen berechnen. Man erhält:

λ	$\frac{\pi_{23} - \pi_{33}}{r^2}$
668 $\mu\mu$	$0,67 \cdot 10^{-8}$
588 $\mu\mu$	$0,69 \cdot 10^{-8}$
502 $\mu\mu$	$0,71 \cdot 10^{-8}$
447 $\mu\mu$	$0,73 \cdot 10^{-8}$

In der Beobachtungsrichtung parallel Y^0 wurden folgende Kompensatormessungen erhalten:

λ	Δ'	Kontrolle	$\overline{\Delta}_{zz}$
668 $\mu\mu$	1,898		$0,2090 \cdot 10^{-4}$
588 $\mu\mu$	1,901	1,901	$0,2396 \cdot 10^{-4}$
502 $\mu\mu$	1,905		$0,2860 \cdot 10^{-4}$
447 $\mu\mu$	1,912		$0,3290 \cdot 10^{-4}$

Hieraus berechnet sich $\frac{\pi_{13} - \pi_{33}}{r^2}$ für die verschiedenen Wellenlängen:

λ	$\frac{\pi_{13} - \pi_{33}}{r^2}$
668 $\mu\mu$	$0,665 \cdot 10^{-8}$
588 $\mu\mu$	$0,669 \cdot 10^{-8}$
502 $\mu\mu$	$0,675 \cdot 10^{-8}$
447 $\mu\mu$	$0,684 \cdot 10^{-8}$

Man findet aus diesen und ähnlichen hier nicht weiter angeführten Beobachtungen, daß die π_{hk} mehr oder weniger

von der Wellenlänge abhängen. Es wird also auch bei elastischer Deformation des Topases immer eine geringe Änderung der natürlichen Dispersion eintreten.

Nachtrag.

Beobachtungen an Beryll.

Entsprechend der Symmetrie des hexagonalen Systems ist für die Polarisationskonstanten als Funktionen der Druckkomponenten $X_x \dots Y_z \dots$ zu setzen:

$$a_{11} - \omega_x^{02} = -\{\pi_{11} X_x + \pi_{12} Y_y + \pi_{13} Z_z\},$$

$$a_{22} - \omega_x^{02} = -\{\pi_{12} X_x + \pi_{11} Y_y + \pi_{13} Z_z\},$$

$$a_{33} - \omega_x^{02} = -\{\pi_{31} X_x + \pi_{31} Y_y + \pi_{33} Z_z\},$$

$$a_{44} = -\pi_{44} Y_z, \quad a_{55} = -\pi_{44} Z_x, \quad a_{66} = -(\pi_{11} - \pi_{12}) X_y,$$

oder als Funktionen der Deformationsgrößen $x_x \dots y_z \dots$:

$$a_{11} - \omega_x^{02} = p_{11} x_x + p_{12} y_y + p_{13} z_z,$$

$$a_{22} - \omega_x^{02} = p_{12} x_x + p_{11} y_y + p_{13} z_z,$$

$$a_{33} - \omega_x^{02} = p_{31} x_x + p_{31} y_y + p_{33} z_z,$$

$$a_{44} = p_{44} y_z, \quad a_{55} = p_{44} z_x, \quad a_{66} = \frac{1}{2} (p_{11} - p_{12}) x_y,$$

wobei als Z^0 -Achse die sechszählige Symmetrieachse, die X^0 - und Y^0 -Achse in der zu letzterer senkrechten Ebene beliebig gewählt ist.

Die Beobachtungen der relativen und absoluten Verzögerungen an zwei würfelförmigen Präparaten, die aus einem brasilianischen Aquamarin hergestellt wurden, ergaben für die piëzooptischen Konstanten folgende Werte:

$$\pi_{11} = -0,349 \cdot 10^{-8} \cdot v^2; \quad \pi_{12} = +0,581 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$

$$\pi_{13} = +0,725 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$

$$\pi_{31} = +0,914 \cdot 10^{-8} \cdot v^2; \quad \pi_{33} = -0,418 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$

$$\pi_{44} = -2,28 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$

und hieraus berechnet sich für die elastooptischen Konstanten:

$$p_{11} = +0,0099 \cdot v^2; \quad p_{12} = +0,175 \cdot v^2; \quad p_{13} = +0,191 \cdot v^2;$$

$$p_{31} = +0,313 \cdot v^2; \quad p_{33} = +0,023 \cdot v^2; \quad p_{44} = -0,152 \cdot v^2.$$

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Voigt, auch an dieser Stelle für die Anregung zu der Arbeit, sowie für sein mir stets bewiesenes Wohlwollen meinen allerherzlichsten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 21. Oktober 1919.)

**3. Zur beschleunigten Bewegung kugelförmiger Körper in widerstehenden Mitteln;
von Fritz Sigismund Schmidt.**

(Leipziger Dissertation.)

Die nachstehenden Untersuchungen wurden im Anschluß an eine Arbeit von Schiller und Döge¹⁾ im physikalischen Institut der Universität Leipzig im Winter 1912/13 begonnen und nach Unterbrechung durch den Krieg im ersten Vierteljahr 1919 abgeschlossen. Es sollte die Bewegung kugelförmiger nur unter dem Einfluß einer konstanten äußeren Kraft stehender Körper in Flüssigkeiten unter Erweiterung des Beobachtungsmateriales von Schiller und Döge untersucht und dabei das Hauptaugenmerk auf den beschleunigt verlaufenden Teil der Bewegung gelegt werden. Hrn. Dr. Schiller danke ich für seine wertvollen Ratschläge bei der Durchführung der Arbeit.

I. Versuchsanordnung.

a) Aufstieg von Ballonen in Luft.

Als Versuchskörper dienten in Luft steigende Pilotballone und in Wasser fallende beschwerte Wachskugeln. Zur Feststellung des Bewegungsverlaufes wurde im wesentlichen die von Schiller und Döge angegebene photographische Festlegung des Ortes der Körper in verschiedenen Zeitpunkten, die gleichen Abstand voneinander hatten, von der Ruhelage aus beginnend benutzt. Es gelangten zwei verschiedene Größen von Ballonen zur Verwendung. Die größeren waren Pilotballone der Continental-Caoutchouc und Guttapercha Compagnie in Hannover. Sie bestanden aus etwa 0,4 mm starker Gummiplatte, hatten gefüllt einen Radius zwischen 26,3 und 29,5 cm und wogen mit Zubinde- und Haltefäden und Haltering zwischen 61,58 und 67,67 g. Die kleineren aus schwächerem Gummi stammten von der Firma Katzenstein in

1) Physik. Zeitschr. 13. S. 234. 1912.

Leipzig. Ihr Radius schwankte zwischen 7,4 und 8,45 cm, ihr Gewicht einschließlich Ring und Fäden zwischen 1,62 und 1,67 g. Als Aufstiegsort diente der etwa 11 m hohe überdachte Lichthof des physikalischen Institutes. Die nächste Wand war von der Aufstiegsstelle über 5 m entfernt. Zur Füllung der Ballone wurde Wasserstoff (Flaschengas) benutzt.

Während des Aufstieges wurde der Ballon mit zwei photographischen Apparaten, deren optische Achsen etwa recht-

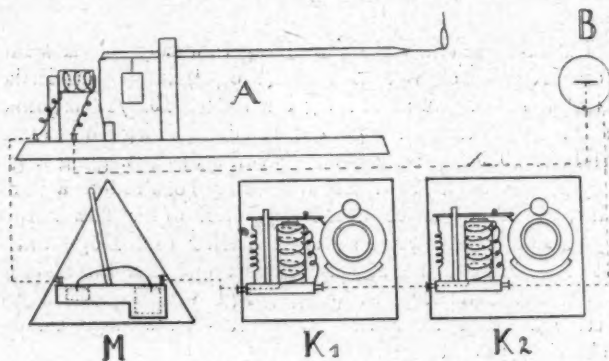


Fig. 1.

A Ablaßvorrichtung
M Metronom

K₁ Kamera I
K₂ Kamera II

B Batterie

winklig zueinander standen, photographiert. Dazu war ein Stromkreis hergestellt (vgl. Fig. 1), in dem sich ein Metronom, die Ablaßvorrichtung für den Ballon und je ein an den Kameras angebrachter Elektromagnet befanden. Das Metronom schloß den Strom durch Eintauchen eines Drahtes in einen Quecksilberkontakt in gleichen etwa eine halbe Sekunde großen Zeitintervallen. Bei jedem Stromschluß zogen die Elektromagnete an den Kameras einen Hebel an, der seinerseits auf die Auslösungshebel der Verschlüsse wirkte. Diese Automatverschlüsse von Bausch und Lomb, spannten sich nach jeder Auslösung selbsttätig wieder, so daß eine beliebige Folge von Aufnahmen gemacht werden konnte. Die Verschlussgeschwindigkeit wurde so groß wie möglich, nach den Angaben auf den Verschlüssen entsprechend einer Belichtungsdauer von $\frac{1}{100}$ Sekunde genommen.

Die Abbläsvorrichtung bestand aus einem doppelarmigen etwa 30 cm langen zunächst horizontal stehenden um eine horizontale Achse drehbaren Hebel, an dessen einem kürzeren Arm ein Gewicht hing. Sein Herabfallen wurde durch eine Sperrklinke verhindert. Das Ende des längeren Armes verjüngte sich in einen dünnen Draht, unter dessen äußerstes Ende der Haltering des Ballons gelegt wurde. Beim ersten Stromschluß durch das Metronom wurde die Sperrklinke durch einen Elektromagneten zurückgezogen, das Gewicht des kurzen Hebelarmes schnellte den langen in die Höhe. Der Ballon wurde so ohne Stoß freigegeben.

Gleichzeitig wurden die Verschlüsse der Kameras das erstmal betätigt und der Ballon in der Ausgangsstellung photographiert. Dieser ersten Aufnahme folgten dann nach gleichen Zeiten die nächsten während des Aufstieges des Ballons, bis dieser den Gesichtskreis der Kameras verlassen hatte.

Um gute Aufnahmen zu erzielen, mußten blau gefärbte Ballone verwendet werden. Als Hintergrund für die Aufnahmen wurden lange schwarze Tuchstreifen an den Wänden gegenüber den Kameras aufgezogen, so daß verhindert wurde, daß bei der mehrmaligen Belichtung der Platten die Stellen, wo der Ballon sich nicht befand, eine Wirkung ausüben konnten. Außerdem wurden lichtstarke Objektive (zwei Zeiß-Tessare, Lichtstärke 1:6,3 Brennweite 21 cm) und höchstempfindliche Platten (Lumière Σ) benutzt. Das Licht der Sommermonate reichte dann zur Erzielung brauchbarer Aufnahmen aus. Die gleichzeitige Aufnahme jedes Aufstieges durch zwei Kameras hatte den Zweck, Abweichungen des Ballons von der geraden Aufstiegsbahn festzustellen und, falls solche auftraten, den betreffenden Aufstieg ausschalten zu können.

Vor der Füllung stellte eine Wägung das Gewicht des Ballons einschließlich Haltering sowie Halte- und Verschlussfäden fest. Vor dem Aufstieg wurde zunächst der Umfang mit einem Bandmaß gemessen, darauf der unter Umständen mit bekannten Gewichten als Ballast beschwerte Ballon dadurch abgewogen, daß eine angehängte Wagschale mit Gewichten so belastet wurde, bis der Ballon ohne zu steigen und zu fallen schwebte. Das Gewicht der Wagschale war vorher ermittelt worden. Die Zeiten der Messungen von Umfang und

Auftrieb wurden notiert. Darauf erfolgte der Aufstieg, nach ihm wieder Feststellung des Auftriebes und des Umfanges, die jetzt im allgemeinen wegen des ausgeströmten Wasserstoffs kleiner ausfielen. Aus allen Messungen wurden Auftrieb und Umfang zur Zeit des Aufstieges interpoliert. Die verwendeten Auftriebe lagen bei den großen Ballonen zwischen 0,99 und 29,81, bei den kleinen zwischen 0,23 und 1,36 g. Er wurde bei den großen bis auf 0,01, bei den kleinen bis auf 0,005 g, der Umfang bei beiden Größen bis auf 0,5 cm bestimmt. Ob die Luft ruhig war, zeigte der beim Abwiegen zur Feststellung des Auftriebes sich selbst überlassene Ballon. Der Aufstiegsraum konnte durch Schließung sämtlicher Öffnungen strömungsfrei gehalten werden. Eine Zu- oder Abnahme der Lufttemperatur mit der Höhe, so daß sie eine die Bewegung merklich beeinflussende Dichteänderung hervorgerufen hätte, war niemals nachzuweisen.

Die so gewonnenen Platten, zwei von jedem Ballonaufstieg, zeigten den Ballon an den Orten, die er zu den um gleiche Intervalle auseinanderliegenden einzelnen Aufnahmezeiten innehatte. Bei Beginn der Bewegung befand sich der Ballonmittelpunkt ungefähr 0,75 m über dem Boden. Sein Weg konnte etwa auf einer Strecke von 2,75 m verfolgt werden. Zur Ausmessung der Platten diente ein Komparator von Zeiß. Mit ihm wurde auf jeder Platte der Ort des oberen und unteren Randes jedes Ballonbildes, verglichen mit dem der Ruhelage festgestellt und durch Mittelbildung der jeweilige Ort des Ballonmittelpunktes gefunden. Mit jeder Kamera war einmal ein am Aufstiegsort aufgehängter Maßstab photographiert worden, so daß durch Ausmessen dieser Platten das Vergrößerungsverhältnis der photographischen Apparate bekannt wurde. Mit dessen Hilfe ließ sich der Ort, den der Ballonmittelpunkt zu jeder Aufnahmezeit gehabt hatte, finden. Die Platten wurden bis auf 0,01 mm genau ausgemessen, was einem Wege des Ballons von 0,6 mm entsprach. Bei den größeren Geschwindigkeiten war jedoch wegen der Unschärfe der Ballonränder größere Unsicherheit bei deren Einstellen vorhanden. Da aber für jeden Ballonort vier Messungen (oberer und unterer Rand auf jeder der zwei Platten) zur Verfügung standen, fand eine gewisse selbsttätige Ausgleichung der Einstellfehler statt.

Um zu sehen, ob dadurch, daß der Ballon seine Bewegung in der Nähe des Bodens begann, Besonderheiten in dieser hervorgerufen wurden, wurde auch eine Reihe von Aufstiegen festgehalten, bei denen der Ballon an einem längeren Faden als gewöhnlich an die Ablaßvorrichtung gehängt wurde, so daß sich der Ballonmittelpunkt im Anfang etwa 1,5 m über dem Boden befand. Ein Einfluß dieser Änderung ließ sich nicht erkennen.

Bei den Aufnahmen wurde so verfahren, daß ein einmal gefüllter Ballon nacheinander mit verschiedener Belastung, also verschiedenem Auftriebe, hochgelassen und jedesmal photographiert wurde. Während der Zeit zwischen dem ersten und letzten Aufstieg änderten sich Form und Inhalt des Ballons nur wenig. Ballone, deren Gestalt merklich von der Kugel-form abwich, wurden ausgeschaltet, ebenso solche, die in einer erheblich von der Geraden abweichenden Bahn aufstiegen, und ferner diejenigen, die beim Ablassen eine Drehung erfuhren, die durch schlechte Form und ungleiche Wandstärke des Gummis hervorgerufen sein dürften. Schließlich wurde zur Prüfung der Genauigkeit auch von einem Ballon eine Reihe von Aufnahmen hergestellt, ohne daß seine Belastung bei jedem Aufstieg geändert wurde. Der Umfang des Ballons änderte sich während der fünf vorgenommenen Aufstiege nicht. Die folgende Tab. 1 gibt die dabei gemessenen Geschwindigkeiten wieder.

Tabelle 1.

Zeit	Auftrieb	0,24	0,71	1,19	1,67	2,14	2,62 sec
1. Aufstieg	10,61 g	20,2	58,6	87,2	117,4	115,1	cm/sec
2. „	10,45	20,2	57,5	92,6	114,0	103,5	„
3. „	9,96	20,6	59,4	96,4	116,3	125,6	104,8 cm/sec
4. „	9,81	20,2	56,3	84,4	114,7	107,9	cm/sec
5. „	9,55	18,7	56,7	83,4	115,1	114,0	104,2 cm/sec

Der Radius des Balones war in allen Fällen 26,3 cm, sein Gesamtgewicht (einschließlich Wasserstoff) 78,40 g. Nach Tab. 1 muß man bei Geschwindigkeiten über 100 cm/sec mit einem mittleren Fehler von etwa ± 7 Proz. rechnen, der in erster Linie durch unkontrollierbare die Geschwindigkeit beeinflussende Ursachen und erst in zweiter durch Ungenauig-

keiten der Messungen hervorgerufen wird. Für die Geschwindigkeit von 50 cm/sec beträgt er nur ± 2 Proz.

b) Fall von Kugeln in Wasser.

Nach derselben Methode wie bei den Ballonen wurde auch

der jeweilige Ort von in Wasser fallenden Wackskugeln bestimmt. Zur Herstellung der Kugeln diente Bienenwachs. Durch Abdrehen nach allen Seiten der roh geformten Kugel auf dem Rande einer glatt und scharf senkrecht zur Achse abgeschnittenen Messingröhre von kreisförmigem Querschnitt und etwas kleinerem als der beabsichtigte Kugeldurchmesser ließ sich eine gute Kugelform erzielen. Das Ergebnis der mit einer Mikrometerschraubenlehre an den einzelnen Kugeln nach verschiedenen Richtungen vorgenommenen Messungen der Kugeldurchmesser ist in Tab. 2 zusammengestellt, die außerdem die Gewichte der Kugeln in Luft und in Wasser gemessen, dessen Temperatur und kinematische Zähigkeit ν , bei der die Versuche ausgeführt wurden, enthält. Dabei ist $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, wo μ den Koeffizienten der inneren Reibung, ρ die Dichte der Flüssigkeit bedeutet.

Tabelle 2.

Nr.	Große Kugeln					Kleine Kugeln					em Durchm. × 10 ⁻⁵ cm/sec
	II	III	IV	V	VI	I	II	IV	V		
Mittel	3,28	3,21	3,27	3,29	3,21	2,09	2,10	2,10	2,10	2,10	
	3,29	3,22	3,28	3,30	3,225	2,095	2,10	2,06	2,10	2,10	
	3,27	3,21	3,28	3,30	3,20	2,09	2,07	2,05	2,10	2,10	
	3,28	3,19	3,25	3,29	3,23	2,095	2,07	2,08	2,10	2,10	
	3,28	3,21	3,27	3,29	3,20	2,10	2,09	2,05	2,10	2,10	
	3,27	3,21	3,28	3,28	3,23	2,09	2,09	2,06	2,10	2,10	
Gewicht in Luft	19,0526	17,4000	18,5086	20,2728	17,3256	4,9174	5,1244	4,6652	4,8628	g	
Gew. in Wasser	0,5851	0,1721	0,1169	1,5087	0,0514	0,0702	0,3166	0,0306	0,0370	g	
Wassertemp.	18,5	18,5	18,0	18,0	16,5	18,0	18,0	19,5	18,5	Grad	
Kine. Zähigkeit	1043	1043	1056	1056	1097	1056	1056	1018	1043	× 10 ⁻⁵ cm/sec	

In die Kugeln war unter der Oberfläche an einer Stelle etwas Blei eingearbeitet, um sie schwerer als Wasser zu machen. Von jeder der zwei benutzten Kugelgrößen wurden mehrere nahezu gleichgroße, aber verschieden schwere Kugeln hergestellt. Dem Blei gegenüber in bezug auf den Kugelmittelpunkt war dicht unter der Oberfläche ein kleiner eiserner Stift eingelassen. Er diente zum Festhalten der Kugeln vor dem Fall durch einen Elektromagneten. Die Kugeln fielen in einen 1,5 m hohen, 30 × 30 cm weiten Trog aus Eisenblech. In zwei einander gegenüberliegenden Seiten von ihm war je

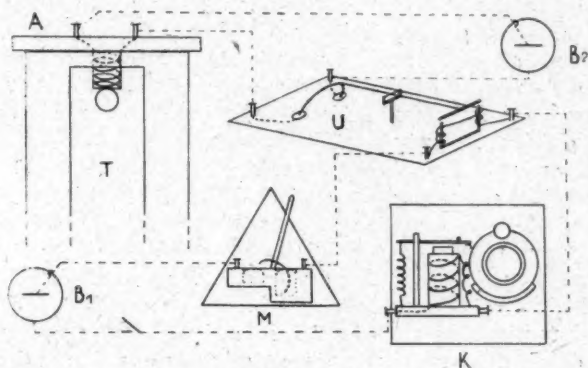


Fig. 2.

A Abläßvorrichtung mit Haltemagnet M Metronom
U Unterbrecher K Kamera
B₁, B₂ Batterien T Trog

ein fast vom oberen bis zum unteren Rande reichendes Glasfenster von 15 cm Breite mit Mennige eingekittet und verschraubt. Über dem Trog war ein zylindrischer Elektromagnet mit senkrechter Achse gelagert, dessen unterer Rand etwa 2 cm unter die Wasseroberfläche des gefüllten Troges tauchte. Dieser Haltemagnet hielt die mit dem Eisenstift nach oben unter ihn gebrachten Wachskugeln bis zu Beginn des Falles fest.

Die Aufnahmen wurden im Zimmer mit dem Fenster im Rücken mit einem der oben beschriebenen photographischen Apparate mit elektromagnetischer Verschlußauslösung aus 2,2 m Entfernung durch die beiden Glasfenster des Troges hindurch gemacht. Zur Sichtbarmachung der Kugeln wurde

während des Falles mit der Hand eine Glühbirne an dem dem Objektiv abgewendeten Trogfenster mit der Kugel mitgeführt. Die Glühbirne war, um das Licht diffus zu machen, mit Seidenpapier umkleidet. Die Kugeln hoben sich vom Lampenhintergrund im Negativ Weiß auf Schwarz scharf ab.

Für die Aufnahmen waren zwei Stromkreise nötig (vgl. Fig. 2). Der erste enthielt den Haltemagnet und die Quecksilberkontakte eines Unterbrechers. Er war vor der Aufnahme geschlossen. Der zweite ging durch das Metronom, den Elektromagneten an der Kamera und einen Elektromagneten, der den am ersten Stromkreis liegenden Unterbrecher öffnete. Diese Öffnung geschah beim ersten Stromschluß durch das Metronom gleichzeitig mit der ersten Aufnahme, so daß auch hier das erste Kugelbild auf der Platte die Kugel am Anfangsort, die folgenden Bilder sie dort zeigten, wo sie sich nach gleichen Zeitzwischenräumen befand.

Es wurden Aufnahmen im vollen Troge von 30×30 cm Grundfläche gemacht, sowie auch in dem verengten Troge, indem Blech- und Glaswände in verschiedenen Abständen eingehängt wurden, um den Einfluß der Wände kennen zu lernen. Masse und Abtrieb der Kugeln wurden vor dem Fall durch ihre Wägung in Luft und in Wasser ermittelt. Jede Kugel wurde mehrere Male, bis zu sechsmal, fallen gelassen und dabei photographiert. Um zu zeigen, wie weit dabei die gemessenen Geschwindigkeiten bei jedem einzelnen Fall übereinstimmten, diene Tab. 3. Sie gibt die dreimal an der großen Kugel V gemessenen Geschwindigkeiten wieder.

Tabelle 3.

Zeit	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75 sec
Platte 1	3,81	21,45	18,61	21,76	24,36	23,08	25,23	26,47 cm/sec
„ 2	4,06	20,92	19,09	21,63	24,30	23,73	25,84	26,39 „
„ 3	4,81	21,88	17,95	22,63	23,99	23,77	23,91	24,60 „

Die Unterschiede sind bei den kleinsten beobachteten Geschwindigkeiten erheblich. Der mittlere Fehler betrug in einigen Fällen sogar 100 Proz. Von der zweitkleinsten Geschwindigkeit ab findet Übereinstimmung innerhalb 2—3 Proz. statt. Für Geschwindigkeiten über 25 cm/sec wachsen die Fehler bis über 4 Proz.

Auch von den Kugeln wurden nur diejenigen benutzt, deren Bahn nahe der Senkrechten durch den Anfangspunkt blieb. Die in Tab. 2 fehlenden große Kugel I und kleine Kugel III wurden aus diesem Grunde ausgeschaltet. Ein in der Mitte des Troges aufgehängter Maßstab lieferte eine Platte zur Bestimmung des Abbildungsverhältnisses der Kamera. Die Ausmessung der Platten erfolgte ebenso wie die der Ballonplatten.

Die Ausmessung der Platten lieferte nach Reduktion auf den wirklichen Maßstab die Abhängigkeit des von den Kugeln bzw. Ballonen zurückgelegten Weges von der Zeit. Durch Bildung der Differenzenquotienten wurde daraus die Geschwindigkeit für die in der Mitte zwischen zwei Aufnahmezeiten liegenden Zeitpunkte abgeleitet. Die so gebildeten Zeit-Geschwindigkeitskurven lassen einen leichteren Einblick in die Bewegung zu als die Zeit-Wegkurven, andererseits sind sie mit geringeren Fehlern behaftet als die Zeit-Beschleunigungskurven, die man durch Bildung der zweiten Differenzenquotienten heranziehen könnte.

Die Ballone wichen dadurch, daß sie einen Füllansatz und mit ihm durch einen etwa 15 cm langen Faden verbunden, einen Haltering aus dünnem Draht von ungefähr 5 cm Durchmesser trugen, von der genauen Kugelform mehr ab als die Wachskugeln, die eine allseitige glatte Oberfläche hatten. Jedoch ließ sich nicht erkennen, daß durch diese Unterschiede in der Form der Verlauf der Bewegung beider Körper verschieden gemacht worden wäre.

Die Abtriebe der Kugeln konnten durch anhaftende dünne Luftschichten und kleine Bläschen gefälscht werden. Diese wurden, soweit möglich, entfernt und die Kugeln nach der Wägung unter Wasser nicht wieder getrocknet, sondern unter Wasser aufbewahrt. Die großen Geschwindigkeiten sind mit größeren Meßfehlern behaftet als die kleinen, einmal wegen der größeren Umschärfe der Bilder, dann wegen der größeren Wegstrecken, aus denen die Geschwindigkeiten interpoliert werden mußten. Schließlich ist es möglich, daß die Geschwindigkeit im ersten Zeitintervall durch einen einseitig wirkenden Fehler verfälscht worden ist, da es hier auf die Gleichzeitigkeit der ersten Aufnahme und des Loslassens ankommt. Es ist nicht ausgeschlossen, daß durch zurückbleibenden

Magnetismus das Abfallen der Kugeln etwas verzögert werden konnte. Dadurch dürften sich die verhältnismäßig großen Abweichungen dieser Geschwindigkeiten bei verschiedenen mit derselben Kugel erhaltenen Platten erklären.

II. Beobachtungsergebnisse.

a) Stationäre Bewegung. Widerstandkoeffizient.

Der Widerstand eines Körpers, der sich in einer ruhenden Flüssigkeit nur unter dem Einfluß seines konstanten Auf- bzw. Abtriebes bewegt, ist

$$(1) \quad Wg = Ag - m \frac{dv}{dt},$$

wo Wg den Widerstand, Ag den Auftrieb, beide in Dynen ausgedrückt, g die Schwerebeschleunigung, m die Masse des Körpers, v seine Geschwindigkeit und t die Zeit bedeutet. Für stationäre Bewegung, wo

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

und somit $W = A$ ist, haben Theorie und die verschiedensten Versuche den Widerstand proportional mit v^2 , F und ϱ ergeben (F größter Querschnitt des Körpers senkrecht zur Bewegungsrichtung, ϱ Dichte der Flüssigkeit), falls die in Betracht kommende Reynoldse Zahl

$$R = \frac{v l}{\nu}$$

(l ein Längenmaß des Körpers, $\nu = \mu/\varrho$ die kinematische Zähigkeit der Flüssigkeit, wenn μ ihre innere Reibung) oberhalb einer gewissen Grenze liegt. Allen¹⁾ gibt für kugelförmige Körper an (r Kugelradius):

$$Wg \text{ proportional } v \quad \text{für } R = \frac{v r}{\nu} < 1,$$

$$Wg \quad \text{,,} \quad v^{1,5} \quad \text{,,} \quad 1 < R < 127,$$

$$Wg \quad \text{,,} \quad v^2 \quad \text{,,} \quad R > 1200.$$

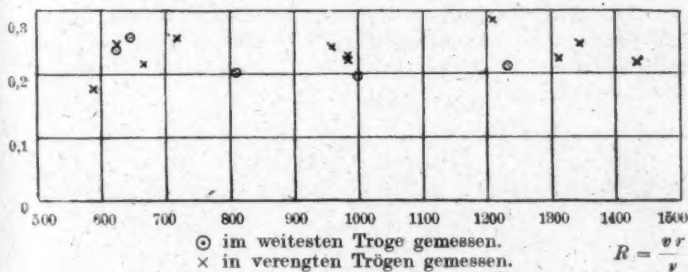
Für das Gebiet $127 < R < 1200$ fehlten Beobachtungen. Zum-

1) H. S. Allen, The motion of a sphere in a viscous fluid. Phil. Mag. S. 323 u. 519. 1900.

Teil füllt die vorliegende Arbeit diese Lücke aus. Im Bereiche des quadratischen Gesetzes ist also

$$(2) \quad Wg = \psi \rho F v^2,$$

wenn mit ψ der Widerstandskoeffizient bezeichnet wird. Dabei ist ψ , solange die Reibung im Vergleich zu den Trägheitswirkungen keinen merklichen Einfluß ausübt, was sie nur bei kleinen Geschwindigkeiten tut, und solange der durch die Bewegung des Körpers hervorgerufene Turbulenzzustand sich nicht ändert¹⁾, konstant zu erwarten. Zur Prüfung dieser Verhältnisse wurden aus den vorliegenden Beobachtungen diejenigen herausgegriffen, bei denen die Körper ihre Endgeschwindigkeit erreicht hatten. Bei sämtlichen Ballonen lag der Punkt, von dem ab die Geschwindigkeit konstant wurde, außerhalb des Bereiches, der auf den Platten festgehalten werden konnte. Nur bei den Wachskugeln mit kleineren Abtrieben ließ sich mit Sicherheit der Eintritt der stationären Bewegung durch Konstanz der Geschwindigkeit während mehrerer Zeitintervalle nachweisen. In Fig. 3 sind die aus diesen Platten nach Gleichung (2) ermittelten Werte von ψ



○ im weitesten Troge gemessen.
× in verengten Trögen gemessen.

Fig. 3.

als Funktion von R aufgetragen und zwar sowohl die im weitesten Troge von 30×30 cm Grundfläche wie auch die im verengten Troge gemessenen, wie in Tab. 4 näher angegeben ist.

1) L. Prandtl, Der Luftwiderstand von Kugeln. Nachr. d. kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen. Berlin 1914. R. Wenger, Die Steiggeschwindigkeit der Gummiballone u. die Turbulenz in d. Atmosphäre. Ann. d. Hydrogr. 45 IV. 1917.

Tabelle 4.

Troggrund- fläche	Kleine Kugel			Große Kugel		
	IV	V	I	VI	IV	III
30 × 30 cm	0,24	0,26	0,20	0,20	0,21	
20 × 30 „			0,22			
20 × 20 „	0,21		0,21	0,18	0,22	0,22
10 × 10 „	0,24		0,23	0,26	0,25	0,28

$$\text{Widerstandskoeffizient } \psi = \frac{W g}{\rho F v^3}$$

Die im weitesten Troge beobachteten Endgeschwindigkeiten, auf Grund deren ψ berechnet wurde, sind in Tab. 5 zusammengestellt.

Tabelle 5.

	Kleine Kugel			Große Kugel	
	IV	V	I	VI	IV
Versuch 1	6,15	6,29	10,24	5,54	7,71 cm/sec
„ 2	6,03	6,56	10,15	5,23	7,95 „
„ 3	6,25	6,35	10,23		8,31 „
„ 4			9,96		„
Mittel . . .	6,14	6,40	10,15	5,39	7,90 „

Endgeschwindigkeiten.

ψ aus diesen Werten ermittelt, schwankt um den Wert 0,22 herum, ohne daß eine klare Abhängigkeit von R zu erkennen wäre. Die sich für die zwischen 600 und 700 liegenden Beträge von R andeutende Vergrößerung von ψ (vgl. Fig. 3) könnte gerade noch durch die Ungenauigkeiten der Geschwindigkeitsbestimmungen erklärt werden (vgl. auch S. 662). Fehler bei diesen machen sich etwa in doppeltem Maße im Werte von ψ bemerkbar. Man kann also ψ im Bereiche $600 < R < 1500$ als Konstante ansehen und damit das quadratische Widerstandsgesetz Gleichung (2) für diesen Bereich als gültig betrachten. Der Einfluß näher gerückter Wände scheint sich als Vergrößerung von ψ und somit des Widerstandes geltend zu machen. In der Folge ist für ψ der Wert 0,22 zugrunde gelegt. In Tab. 6 ist eine Reihe von aus anderen Widerstandsmessungen berechneten Werten von ψ zusammengestellt.

Tabelle 6.

	ψ	beob. im Bereich		
		$R = \frac{v r}{v}$		
		größer als	kleiner als	
Shakespear, Phil. Mag. 1914. S. 728	0,21—0,24	948	22 700	{ bewegte Kugeln in ruhender Luft bewegte Stahlkugeln in ruhend. Wasser
H. S. Allen, Phil. Mag. 1900. S. 323, 519 . .	0,17—0,20	1200	40 000	
Hesselberg u. Birkeland, Beiträge z. Physik d. freien Atmosphäre. IV. 4	0,4—0,2	2000	200 000	{ kleine } Ballone große } in ruhender Luft
Eiffel, Sur la resistance des sphères dans l'air en mouvement. C. R. (1912) S. 1597 . . .	0,21		60 000	{ ruhende Kugeln im im Luftstrom
Prandtl, Göttinger Be- richte. 1914	0,22		50 000	{ ruhende Kugeln im Luftstrom.

Danach erscheint es berechtigt, auch für den Bereich $1500 < R < 50000$, der für die in dieser Arbeit gemachten Versuche noch in Frage kommt, ψ zu 0,22 anzunehmen.

b) Beschleunigte Bewegung. Beobachtete Geschwindigkeiten.

Nimmt man nun an, daß Gleichung (2) auch für nicht-stationäre Bewegung den Wert des Widerstandes richtig angibt, so kann man die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Zeit durch Auflösung der aus Gleichung (1) und (2) hervorgegangenen Gleichung

$$m \frac{dv}{dt} = Ag - \psi \rho F v^2$$

nach v finden.¹⁾ Man erhält:

$$(3) \quad v = \sqrt{\frac{Ag}{\psi \rho F} \frac{e^{\frac{2}{m} \int Ag \psi \rho F \cdot t} - 1}{e^{\frac{2}{m} \int Ag \psi \rho F \cdot t} + 1}}$$

In dieser Gleichung sind, wenn für ψ der oben ermittelte Wert 0,22 eingesetzt wird, alle Konstanten bekannt bzw. meßbar.

1) Hesselberg u. Birkeland, a. a. O.

Tabelle 4.

Troggrund- fläche	Kleine Kugel			Große Kugel		
	IV	V	I	VI	IV	III
30 × 30 cm	0,24	0,26	0,20	0,20	0,21	
20 × 30 "			0,22			
20 × 20 "	0,21		0,21	0,18	0,22	0,22
10 × 10 "	0,24		0,23	0,26	0,25	0,28

$$\text{Widerstandskoeffizient } \psi = \frac{Wg}{\rho F v^2}$$

Die im weitesten Troge beobachteten Endgeschwindigkeiten, auf Grund deren ψ berechnet wurde, sind in Tab. 5 zusammengestellt.

Tabelle 5.

	Kleine Kugel			Große Kugel	
	IV	V	I	VI	IV
Versuch 1	6,15	6,29	10,24	5,54	7,71 cm/sec
" 2	6,03	6,56	10,15	5,23	7,95 "
" 3	6,25	6,35	10,23		8,31 "
" 4			9,96		"
Mittel . . .	6,14	6,40	10,15	5,39	7,90 "

Endgeschwindigkeiten.

ψ aus diesen Werten ermittelt, schwankt um den Wert 0,22 herum, ohne daß eine klare Abhängigkeit von R zu erkennen wäre. Die sich für die zwischen 600 und 700 liegenden Beträge von R andeutende Vergrößerung von ψ (vgl. Fig. 3) könnte gerade noch durch die Ungenauigkeiten der Geschwindigkeitsbestimmungen erklärt werden (vgl. auch S. 662). Fehler bei diesen machen sich etwa in doppeltem Maße im Werte von ψ bemerkbar. Man kann also ψ im Bereiche $600 < R < 1500$ als Konstante ansehen und damit das quadratische Widerstandsgesetz Gleichung (2) für diesen Bereich als gültig betrachten. Der Einfluß näher gerückter Wände scheint sich als Vergrößerung von ψ und somit des Widerstandes geltend zu machen. In der Folge ist für ψ der Wert 0,22 zugrunde gelegt. In Tab. 6 ist eine Reihe von aus anderen Widerstandsmessungen berechneten Werten von ψ zusammengestellt.

Tabelle 6.

	ψ	beob. im Bereich $R = \frac{v r}{v}$		
		größer als	kleiner als	
Shakespear, Phil. Mag. 1914. S. 798	0,21—0,24	948	22 700	bewegte Kugeln in ruhender Luft
H. S. Allen, Phil. Mag. 1900. S. 823, 519 . .	0,17—0,20	1200	40 000	bewegte Stahlkugeln in ruhend. Wasser
Hesselberg u. Birkeland, Beiträge z. Physik d. freien Atmosphäre. IV. 4	0,4—0,2	2000	200 000	kleine } Ballone große } in ruhender Luft
Eiffel, Sur la resistance des sphères dans l'air en mouvement. C. R. (1912) S. 1597	0,21		60 000	ruhende Kugeln im im Luftstrom
Prandtl, Göttinger Be- richte. 1914	0,22		50 000	ruhende Kugeln im Luftstrom.

Danach erscheint es berechtigt, auch für den Bereich $1500 < R < 50000$, der für die in dieser Arbeit gemachten Versuche noch in Frage kommt, ψ zu 0,22 anzunehmen.

b) Beschleunigte Bewegung. Beobachtete Geschwindigkeiten.

Nimmt man nun an, daß Gleichung (2) auch für nicht-stationäre Bewegung den Wert des Widerstandes richtig angibt, so kann man die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Zeit durch Auflösung der aus Gleichung (1) und (2) hervorgegangenen Gleichung

$$m \frac{dv}{dt} = Ag - \psi \rho F v^2$$

nach v finden.¹⁾ Man erhält:

$$(3) \quad v = \sqrt{\frac{Ag}{\psi \rho F} \left(\frac{2}{e^m} \sqrt{Ag \psi \rho F} \cdot t - 1 \right) + 1}$$

In dieser Gleichung sind, wenn für ψ der oben ermittelte Wert 0,22 eingesetzt wird, alle Konstanten bekannt bzw. meßbar.

1) Hesselberg u. Birkeland, a. a. O.

Für v ergibt sich eine Kurve (vgl. auch Fig. 9), die zunächst mit t rasch wächst und sich dann asymptotisch der Endgeschwindigkeit

$$\sqrt{\frac{Ag}{\psi q F}}$$

nähert. Für $t = 0$ ist die Neigung der Kurve gegen die t -Achse gleich Ag/m . Von zwei Kurven verläuft die mit größerem Auftrieb völlig oberhalb der mit kleinerem Auftrieb. Der Vergleich der so errechneten und beobachteten Zeit-Geschwindigkeitskurven muß darüber Aufschluß geben, ob auch für

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

Gleichung (2) Gültigkeit besitzt bzw. in welcher Art sich der Widerstand in diesem Falle ändert. Er wurde für alle beobachteten Bewegungen der Ballone und Kugeln angestellt und ergab:

1. Die beobachteten Geschwindigkeiten bleiben, bevor die Endgeschwindigkeit erreicht wird, stets kleiner, als sie sich zu denselben Zeiten aus Gleichung (3) errechnen. Das quadratische Gesetz gilt demnach nicht für beschleunigte Bewegung, sondern der Widerstand ist im ganzen größer während der Zeit, in der Beschleunigung stattfindet, als er bei denselben Geschwindigkeiten bei stationärer Bewegung sein würde. Der zurückgelegte Weg ist kleiner als in diesem Fall.

2. Nach den Beobachtungen wächst v nicht, wie Gleichung (3) verlangt, dauernd mit t , sondern es nimmt zunächst zu bis zu einem Maximum, das kleiner als die Endgeschwindigkeit ist, geht darauf durch ein Minimum, um dann erst meist nach weiteren, aber geringeren Schwankungen der Endgeschwindigkeit asymptotisch zuzustreben. Diese Eigentümlichkeiten treten in gleicher Weise bei den Ballonen wie bei den Wackkugeln auf. Bei den großen Ballonen reichen die Beobachtungen infolge der räumlichen Verhältnisse, unter denen sie gemacht werden mußten, fast alle nur etwas über das erste Maximum hinaus. Einige konnten so weit verfolgt werden, daß auch das folgende Minimum mit erfaßt wurde. Die kleinen Ballone und die Kugeln lassen alle Maximum und Minimum erkennen bis auf die kleine Kugel II, deren Kurve nur einen

Knick aufweist, wo das Maximum zu vermuten wäre (vgl. Fig. 7). Die Kugeln mit kleineren Abtrieben haben auf einer längeren Strecke ihre Endgeschwindigkeit angenommen. Der Widerstand ergibt sich demnach nicht als eindeutige Funktion von v , sondern er nimmt je nach dem vorhergegangenen Verlauf der Bewegung verschiedene Werte bei derselben Geschwindigkeit an.

■

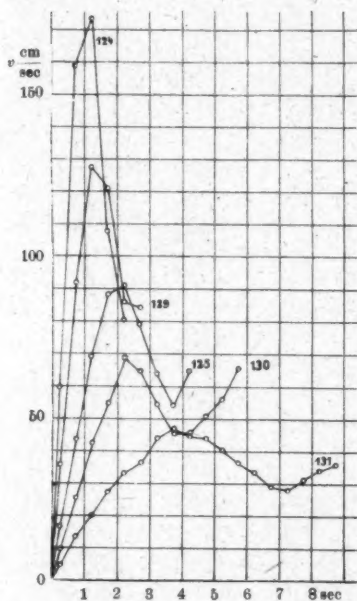


Fig. 4. Große Ballone.

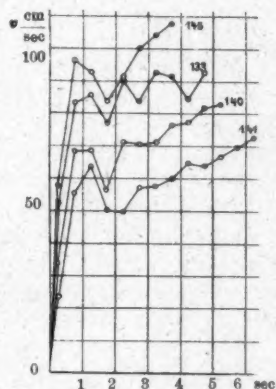


Fig. 5. Kleine Ballone.

In Figg. 4—7 sind die mit einer Anzahl von Ballonen, sowie die mit den Kugeln erhaltenen Kurven $v(t)$ wiedergegeben. Bei den Kugeln ist dabei von mehreren jedesmal zur Verfügung stehenden Platten, d. h. Versuchen unter gleichen Bedingungen, eine ausgewählt worden, deren Ausmessung Geschwindigkeiten ergab, die etwa in der Mitte zwischen denen mit sämtlichen Platten gewonnenen Werten lagen.

Dabei war:

Ballon Nr.	Radius cm	Gesamtgewicht einschließ- lich Wasserstoff g	Auftrieb g
124	22,4	37,22	15,24
125	22,4	47,22	4,51
129	21,1	37,90	7,82
130	21,1	42,90	2,42
131	21,1	43,90	0,99
133	7,8	1,785	0,63
140	7,9	1,790	0,42
141	7,8	1,785	0,30
145	8,0	1,845	0,71

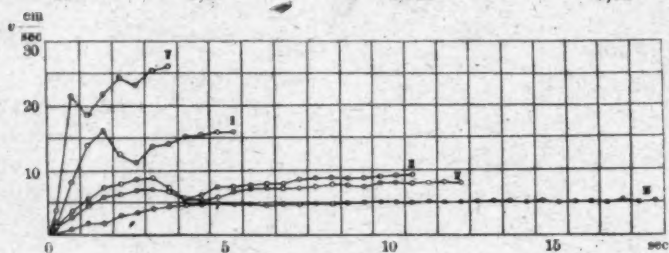


Fig. 6. Große Kugeln.

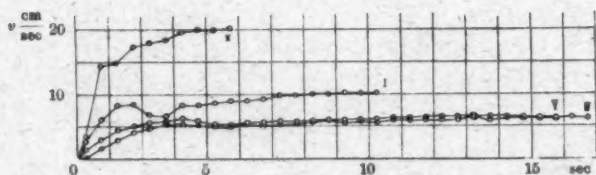


Fig. 7. Kleine Kugeln.

c) Transformation aller Beobachtungen auf eine Flüssigkeit und eine Körpergröße.

Vorerst ist es, um die an Ballonen und Kugeln verschiedenen Maßstabes und in verschiedenen Flüssigkeiten gemachten Beobachtungen miteinander vergleichen zu können, nötig, alle auf eine Größe und eine Flüssigkeit zu transformieren. Es werde hierzu die große Kugel IV (Radius 1,635 cm) und Wasser von 18° (innere Reibung $\mu = 0,01055$, Dichte $\rho = 0,9986$, kinematische Zähigkeit $\nu = 0,01056$) genommen. Das Gesetz

über die Ähnlichkeit von Flüssigkeitsbewegungen verlangt, daß folgende Gleichungen erfüllt sein müssen¹⁾:

$$(4) \quad A = A_0 \frac{\mu^3 \varrho_0}{\mu_0^3 \varrho}, \quad v = v_0 \frac{l_0 v}{l v_0}, \quad t = t_0 \frac{v_0 l^2}{v l_0^2},$$

wenn zu einer Bewegung in einer gewissen Flüssigkeit, bei einem gewissen Längenmaß (angedeutet durch den Index Null) die ihr ähnliche in einer anderen Flüssigkeit und bei einem anderen Längenmaß (anderer Körpergröße) gefunden werden soll. Sämtliche beobachteten Zeitgeschwindigkeitskurven wurden durch die Gleichungen (4) in neue Kurven transformiert, die die Bewegung eines kugelförmigen Körpers vom Radius 1,635 cm in Wasser von 18° wiedergeben, wenn auf ihn die sich aus den gemessenen durch die erste der Gleichungen (4) ergebenden Auf- bzw. Abtriebe wirken. Als Vergleichsmaß diente der Radius der Körper. Für μ und ϱ des Wassers wurden die in Kohlrauschs Lehrbuch der praktischen Physik für die verschiedenen Temperaturen angegebenen Werte eingesetzt. Die Temperatur bei den Ballonaufstiegen betrug stets wenig über oder unter 20°. Für die Luftdichte wurde ihr mittlerer Wert bei den Versuchen 0,0012 benutzt, für ihre innere Reibung das Mittel der im Tabellenwerk von Landolt-Börnstein für 20° angegebenen Werte, nämlich 0,000190. Wenn das Ähnlichkeitsgesetz richtig ist, müßten, falls zufällig in der Reihe der Beobachtungen zwei vorhanden wären, deren Kräfte (Auf- oder Abtriebe) nach der Transformation ganz oder nahezu übereinstimmen, auch die aus den unter ganz verschiedenen Umständen beobachteten Werten von v und t durch Transformation hervorgegangenen Kurven ganz oder nahezu übereinstimmen, im übrigen die Kurven sich nach den zu ihnen gehörigen transformierten Auftrieben ordnen. Das ist bei dem vorliegenden Beobachtungsmaterial durchweg der Fall. In Fig. 8 sind die aus den Kurven der Figg. 4—7 durch Transformation gewonnenen Kurven eingezeichnet. Nicht mit angeführt sind, um die Übersicht nicht zu gefährden, die Ballone 125 und 129, die in aus Fig. 4 leicht ersichtlicher Weise zwischen bzw. über den Kurven von 124 und 130 liegen, sowie große Kugel III und kleine Kugel V, deren Kurven sehr

1) Vgl. z. B. Cl. Schäfer, Einf. in die theor. Physik, Bd. I. S. 904. Leipzig 1914.

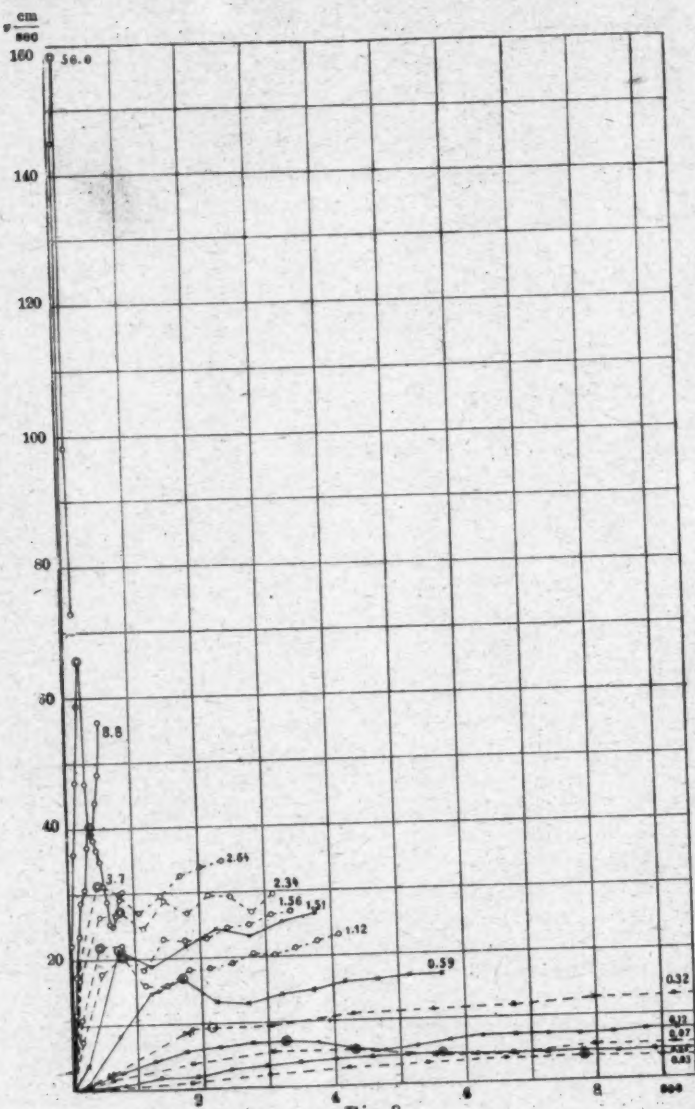


Fig. 8.

nahe mit anderen Kurven derselben Kugelgröße zusammenliegen. An jede Kurve in Fig. 8 ist der dazugehörige (transformierte) Auftrieb angeschrieben. Um die Herkunft der Kurven zu kennzeichnen, sind die zu den großen und kleinen Ballonen gehörigen Geschwindigkeiten durch Kreise, die zu den großen und kleinen Kugeln gehörigen durch Kreuze bezeichnet und die zu den großen Kugeln und großen Ballonen gehörigen Kurven ausgezogen, die zu den kleinen Kugeln und kleinen Ballonen gehörigen gestrichelt gezeichnet worden. Außerdem sind die Maxima von v noch besonders auf jeder Kurve durch einen etwas größeren Kreis bezeichnet. Nach rechts hin setzen sich die zu Auftrieben von 0,32 g und kleiner gehörigen Kurven weiter fort, als auf Fig. 8 zu erkennen ist, in der Weise, wie aus Figg. 6 und 7 ersichtlich ist. Dabei entspricht der letzten mit der kleinen Kugel IV beobachteten Zeit von 15,75 Sek. die Zeit 37,8 Sek. der transformierten Kurve mit dem Auftrieb 0,03 g.

Fig. 8 zeigt, daß sich alle Kurven in eine nach ihren Auftrieben geordnete Schar einfügen und daß für die wenig verschiedenen Auftriebe 1,51 und 1,56, die einerseits der großen Kugel V, andererseits dem Ballon 140 entsprechen, die transformierten Bewegungen nahezu gleich, die ursprünglichen demnach ähnlich verlaufen. Auch die Besonderheiten aller Kurven, ihre Maxima und Minima, zeigen innerhalb der ganzen Schar ein gesetzmäßiges Verhalten, wie weiter unten noch weiter ausgeführt wird. Der Umstand, daß sämtliche der unter den verschiedensten Bedingungen gemachten Beobachtungen sich in eine gleichmäßig geordnete Schar transformieren lassen, ist eine Bestätigung für die Richtigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes.

Von jetzt ab werden zur Untersuchung nur noch die transformierten Werte von v , t und A herangezogen.

d) Näherungsweise Darstellung der Beziehungen zwischen Geschwindigkeit und Zeit.

Es wurde nun zunächst versucht, den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit durch eine Gleichung darzustellen, die, ohne auf die Schwankungen der Geschwindigkeit und deren Durchgang durch ein Maximum und Minimum vor Erreichung der Endgeschwindigkeit Rücksicht zu nehmen, geeignet wäre, in erster Annäherung die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von

der Zeit und jedenfalls besser als Gleichung (3) zu beschreiben. Als brauchbar erwies sich die Gleichung:

$$(5) \quad v = v_E (1 - C^t),$$

wo v die Endgeschwindigkeit gleich

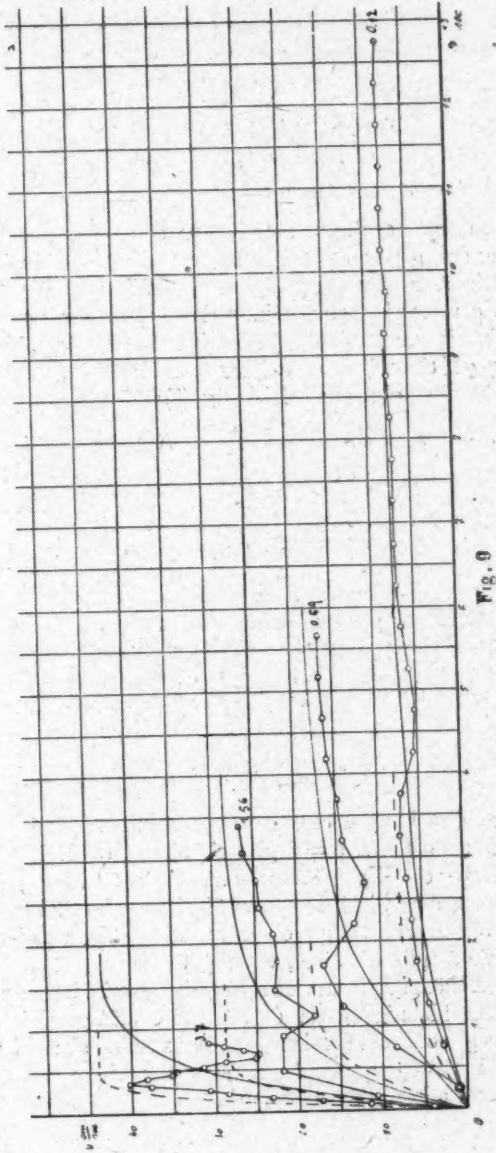
$$\sqrt{\frac{Ag}{\psi \rho F}},$$

C eine Konstante kleiner als 1 bedeutet. Die Konstante C wurde für eine Reihe von Kurven der Schar durch graphische Ausgleichung ermittelt. In Fig. 9 sind nochmals einige beobachtete (transformierte) Zeit-Geschwindigkeitskurven aufgeführt und dazu die nach Gleichung (5) (ausgezogene Kurve) und nach Gleichung (3) (gestrichelte Kurve) errechnete Kurve gezeichnet. Die angeschriebenen Zahlen sind wieder die zu den einzelnen Kurven gehörigen Auftriebe.

Hieraus ist das auf S. 646 unter 1. Gesagte ersichtlich, daß die beobachteten Geschwindigkeiten, bevor die Bewegung stationär geworden ist, bevor also der Wert der Endgeschwindigkeit

$$\sqrt{\frac{Ag}{\psi \rho F}}$$

erreicht ist, alle unter der aus Gleichung (3) errechneten (gestrichelten) Kurve bleiben. Bei dieser ist für $t=0$ die Neigung gegen die t -Achse, das ist die Anfangsbeschleunigung, gleich Ag/m . Die beobachtete Beschleunigung für $t=0$ ist stets geringer als dieser Wert, da die wirksame Kraft, der Auftrieb, nicht nur die Körpermasse allein, sondern auch die umgebende Flüssigkeit beschleunigen muß. Es ist daher der Auftrieb, der gleich der Summe aus Produkten von Masse und Beschleunigung des Körpers und jedes umgebenden Flüssigkeitselementes ist, größer als das Produkt von Masse und Beschleunigung des Körpers allein, den allein der Messung zugänglichen Größen. Das heißt aber, es macht sich sofort bei Beginn der Bewegung auch für verschwindend kleine Geschwindigkeiten ein endlicher Widerstand bemerkbar, was in Gleichung (2) nicht zum Ausdruck kommt. Benutzt man Gleichung (5) als näherungsweise Beschreibung der Abhängigkeit zwischen Geschwindigkeit und Zeit, so ergibt sich bei Berechnung des Widerstandes $Wg = Ag - m \frac{dv}{dt}$:



$$C = 1 - \frac{v}{v_E},$$

$$\frac{dv}{dt} = -v_E C^2 \ln C = (v - v_E) \ln C,$$

$$\begin{aligned} Wg &= Ag - m(v - v_E \ln C), \\ &= (Ag + m v_E \ln C) - m \ln C \cdot v, \end{aligned}$$

$$Wg = a_1 + a_2 \cdot v,$$

wo a_1 und a_2 Konstante sind. Um den Unterschied dieses Widerstandes gegen den sich bei derselben Geschwindigkeit aber stationärer Bewegung ergebenden Widerstand zu finden, werde Wg in zwei Bestandteile zerlegt, einen nur von der Geschwindigkeit nach dem quadratischen Gesetz abhängigen $gW_1 = \psi \varrho F v^2$ und einen von der Beschleunigung abhängigen gW_2 . Für ihn folgt aus Gleichung (5):

$$Wg = gW_1 + gW_2 = gW_1 + \psi \varrho F v^2 = Ag - m \frac{dv}{dt}$$

$$gW_2 = Ag - m \frac{dv}{dt} - \psi \varrho F v^2$$

$$= Ag - m \frac{dv}{dt} - \psi \varrho F \left(\frac{dv}{dt} \frac{1}{\ln C} + v_E \right)^2$$

und, da $Ag = \psi \varrho F v_E^2$,

$$= - \left(m + \frac{2 \psi \varrho F v_E}{\ln C} \right) \frac{dv}{dt} - \frac{\psi \varrho F}{\ln^2 C} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2,$$

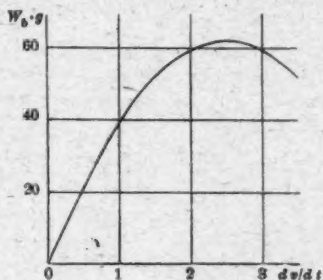
$$(6) \quad Wg = \psi \varrho F v^2 + b_1 \frac{dv}{dt} + b_2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2.$$

Für

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

geht diese Gleichung in das gewöhnliche quadratische Widerstandsgesetz über, für $v = 0$ gibt sie einen von Null verschiedenen Wert von Wg . Ferner entspricht Gleichung (5) dadurch besser den wirklichen Verhältnissen als Gleichung (3), daß sie die Annäherung von v an die Endgeschwindigkeit richtiger wiedergibt als diese, wie Fig. 9 erkennen läßt. Fig. 10 zeigt die Abhängigkeit des Beschleunigungswiderstandes $W_2 g$ von der Beschleunigung für den Auftrieb 0,12 g. Die größte Abweichung vom quadratischen Gesetz tritt also nicht bei Beginn der Bewegung, sondern erst später ein, wenn die Beschleunigung schon abgenommen hat.

Bei der Ausgleichung der Kurve $v(t)$ und der dabei erfolgten Ermittlung von C sind Willkürlichkeiten nicht zu vermeiden, die um so größer sind, je weiter die zuletzt beobachtete Geschwindigkeit noch hinter der Endgeschwindigkeit zurückbleibt. Im ungünstigsten Falle ergeben sich dabei Unsicherheiten von v von 10 Proz., sofern v etwa $\frac{1}{3} v_E$ ist. Für größere



$$A = 0,12 \text{ g}, \quad m = 18,51, \quad v_E = 7,05 \text{ cm/sec} \quad C = 0,65,$$

$$g W_0 = 49,54 \frac{dv}{dt} - 9,92 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2.$$

Fig. 10.

und kleinere v sind die Unsicherheiten geringer. Trägt man die Werte C , die sich aus den verschiedenen Kurven der Schar in Fig. 8 ergeben haben, in Abhängigkeit vom Auftrieb auf und verbindet man die Punkte durch eine Kurve, so erhält man Fig. 11. Mit ihrer Hilfe ist es jetzt möglich, den Bewegungsverlauf für irgendeinen Auftrieb bei beliebigem Radius in beliebiger Flüssigkeit zu beschreiben. Dazu ermittelt man aus ihr für den aus dem vorgegebenen auf die Verhältnisse von Fig. 8 transformierten Auftrieb den Wert von C . Bezeichnet man alle Größen unter den gegebenen Verhältnissen, für die die Bewegung gesucht wird, mit dem Index Null, die von Fig. 8 ohne Index, so ist:

$$v = v_E(1 - C^t), \quad v_0 = v_E(1 - C_0^{t_0}),$$

$$\lg C = \frac{1}{t} \lg \left(1 - \frac{v}{v_E} \right), \quad \lg C_0 = \frac{1}{t_0} \lg \left(1 - \frac{v_0}{v_E} \right) = \frac{1}{t_0} \lg \left(1 - \frac{v}{v_E} \right),$$

$$\lg C_0 = \frac{t}{t_0} \lg C = \frac{v_0^2}{v^2} \lg C$$

nach der 3. Gleichung (4). Da ferner

$$v_{E_0} = \sqrt{\frac{A_0 g}{\psi q_0 F_0}}$$

ist, sind in der Gleichung

$$v_0 = v_{E_0}(1 - C_0^{10})$$

alle Konstanten bekannt und damit der Verlauf von v_0 angenähert ohne Berücksichtigung von Maximum und Minimum bestimmt.

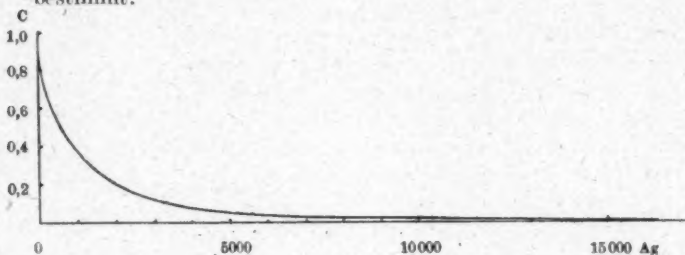


Fig. 11.

e) Strömungsverlauf um die Kugeln.

Der auffallendste Unterschied zwischen den ausgeglichenen und den beobachteten Kurven besteht darin, daß v in Wirklichkeit nicht dauernd mit t wächst, sondern große Schwankungen erleidet. Diese müssen, da äußere Einflüsse, die Geschwindigkeitsänderungen dieser Größenordnung hervorbringen konnten, vollkommen ausgeschlossen waren und die Erscheinung in ganz gleicher Weise sowohl in Luft wie in Wasser auftritt, unbedingt mit der Bewegung verknüpft sein. Einen gewissen Aufschluß gab die Beobachtung des Strömungsverlaufes um die Körper. Wurde eine Wachskugel in Fuchsinlösung getaucht und darauf vorsichtig unter den Haltemagneten gebracht, so konnten beim Fall der Kugel die Strömungslinien der der Kugel benachbarten Flüssigkeitsteile sichtbar gemacht werden. Es bildete sich kurz nach Beginn der Bewegung ein Wirbelring aus, der etwas kleineren als Kugeldurchmesser besaß, dessen Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung lag und der sich an die Kugel angeheftet mit ihr mitbewegte. Während der Bewegung vergrößerte sich seine Masse. Etwa zur Zeit des ersten Minimums von v trennte sich der Wirbelring von der Kugel und blieb gegen diese zurück. Die Strömung hinter

der Kugel wurde von da ab meist turbulent, zuweilen schien sich noch ein zweiter Wirbelring ausbilden zu wollen. Da die an der Kugel haftende Farbe bis dahin fast aufgezehrt war, ließ sich über den weiteren Strömungsverlauf kein klares Bild mehr gewinnen. Fig. 12 zeigt das nach einer leider nicht sehr deutlichen Photographie gezeichnete Strömungsbild. Die Trennung von Wirbel und Kugel erfolgte meist nicht gleichzeitig an allen Stellen des Ringes. Gewöhnlich haftete der Wirbel an einer Seite der Kugel länger. Nach dieser Seite hin erlitt dann bei der Trennung die Kugel eine Ablenkung und pendelte dann während des weiteren Falles um die Senkrechte durch den Ausgangspunkt hin und her. Ob Unregelmäßigkeiten der Kugeloberfläche die Ursache dieser bei einigen Kugeln, die zu Geschwindigkeitsmessungen nicht benutzt wurden, sehr starken, bei anderen nur geringen Störungen der geradlinigen Bewegung sind, bleibe dahingestellt. Wie die Strömung hinter dem Wirbel verlief, ob sie dort turbulent war oder nicht, ließ sich nicht erkennen, da durch die der Kugel anhaftende Farbe nur die in den Wirbel einbezogene Flüssigkeitsteile gefärbt wurden.

Die potentielle Energie der Kugel verwandelt sich während der Bewegung in kinetische Energie. Die Beobachtungen lehren, daß die Abnahme der potentiellen Energie, die ständig erfolgt, nicht gleich ist der Zunahme der kinetischen Energie der Kugel, daß diese sogar in gewissen Zeiten auch eine Abnahme erfährt. Die Differenz beider muß sich, wenn man von der durch Reibung erzeugten Wärme absieht, in der Flüssigkeit wiederfinden als deren kinetische Energie, die ständig zunimmt, besonders stark in den Zeiträumen, wo die Geschwindigkeit der Kugel abnimmt. Sie besteht aus der Energie des Wirbels und der Energie der übrigen Flüssigkeit. Zwischen Kugel, Wirbel und der übrigen Flüssigkeit findet ein beständiger Energieaustausch statt, über dessen Einzelheiten die Beobachtungen nichts aussagen, da nur die kinetische Energie der Kugel gemessen werden kann. Doch könnte die Entstehung des ersten Maximums und Minimums von v etwa



Fig. 12.

folgendermaßen gedacht werden. Es ist wahrscheinlich, daß die Zunahme der Energie der Flüssigkeit zum größten Teil zur Bildung des Wirbels verbraucht wird, und zwar einerseits zur Erzeugung seiner Rotationsgeschwindigkeit, andererseits um, wie der Augenschein lehrt, seine Masse zu vergrößern. Solange diese beiden Faktoren wirken (in welchem Verhältnis sie zueinander stehen, lassen die Beobachtungen nicht erkennen), wird der Kugel Energie entzogen, so daß ihre Geschwindigkeit immer weniger zu-, schließlich sogar abnimmt. Mit der Trennung des Wirbels von der Kugel hört dieser auf, ihr Energie zu entziehen. Nur der Energieverbrauch der übrigen Flüssigkeit ist jetzt von der Kugel zu decken, der so gering ist, daß deren Geschwindigkeit wieder zunehmen kann. Da bei der Trennung von Wirbel und Kugel sich das ganze Strömungsbild wesentlich ändert und mit ihm die Energieverteilung in der Flüssigkeit, ist es erklärlich, daß von diesem Augenblick an die Änderung der kinetischen Energie der Kugel in anderer Weise als vor diesem Zeitpunkte erfolgt und daß daher auch die Beziehung zwischen Widerstand und Geschwindigkeit und somit zwischen Geschwindigkeit und Zeit anders wird als vorher.

f) Die Maxima und Minima der Geschwindigkeit.

Das erste Maximum von v bei sämtlichen Kurven der Schar der Fig. 8 hängt in einfacher Weise vom Auftrieb ab. Seine Werte schmiegen sich der Kurve

$$(7) \quad v_{\max}^2 = 0,4 \times A g$$

an. Da ferner

$$v_K^2 = \frac{A g}{\psi \varrho F} = \frac{A g}{1,847}$$

ist, wird

$$v_{\max}^2 = v_K^2 \times 0,4 \times 1,847 = v_K^2 \times 0,74,$$

$$\frac{v_{\max}}{v_K} = 0,86$$

konstant für alle Kurven der Schar. Dazu sind sämtliche Beobachtungen herangezogen worden, außer den in Fig. 8 erwähnten noch 21 Aufstiege von großen und 4 von kleinen Ballonen.

Die zusammengehörigen Werte von v_{\max} und t liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel mit der v -Achse und einer Parallelen zu t -Achse als Asymptoten. Die Ausgleichung sämtlicher Beobachtungen führt auf die Gleichung:

$$(v_{\max} - 3,2)t_{\max} = 13,15$$

und

$$(8) \quad t_{\max} = \frac{13,15}{\sqrt{0,4 \times Ag - 3,2}},$$

wenn für v_{\max} die oben ermittelte Abhängigkeit vom Auftrieb eingesetzt wird. Die beiden Gleichungen (7) und (8) lassen jetzt das erste Geschwindigkeitsmaximum eines sich in Wasser von 18° unter einem beliebigen gegebenen Auftrieb bewegendem kugelförmigen Körpers vom Radius 1,635 cm berechnen, sowie die Zeit, zu der es eintritt. Für eine andere Flüssigkeit und andere Körpergröße ergeben sich hieraus die Werte von v_{\max} und dem dazugehörigen t_{\max} durch Anwendung der Gleichungen (4).

Ganz ähnlich verhalten sich die dem ersten Maximum folgenden Minima von v . Es ist:

$$(7a) \quad v_{\min}^2 = 0,36 \times Ag,$$

$$\frac{v_{\min}}{v_E} = 0,815,$$

$$(v_{\min} - 2)t_{\min} = 18,$$

$$(8a) \quad t_{\min} = \frac{18}{\sqrt{0,36 \times Ag - 2}}.$$

Jedoch sind die Abweichungen von der Hyperbel hier größer als bei den Maximis. In Fig. 13 sind die beobachteten Maxima und Minima von v in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen und die beiden Hyperbeln eingezeichnet. Die mit den Ballonen und die mit den Kugeln gewonnenen Beobachtungen unterscheiden sich in keiner Weise. Sie gehorchen alle demselben Gesetz. Hierin kommt die Gültigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes exakter zum Ausdruck als oben. Daher erscheint es auch erlaubt, den Teil der Bewegung der Ballone, der nicht mehr beobachtet werden konnte, nach den an den Kugeln gewonnenen Einblicken zu ergänzen, z. B. zum Zwecke der Ausgleichung nach Gleichung (5), und die Geschwindigkeitsschwankungen der Bildung eines Wirbelringes zuzuschreiben.

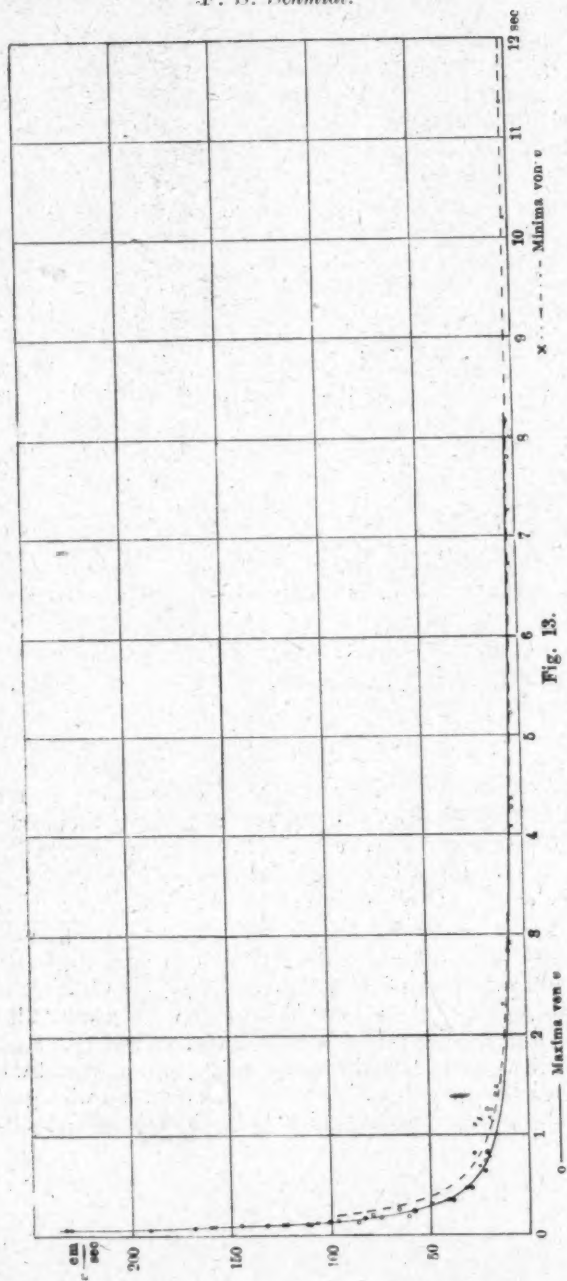


Fig. 13.

Ob auch bei größeren als den hier verwendeten Auftrieben die Art der Bewegung erhalten bleibt, insbesondere der Durchgang von v durch ein Maximum und Minimum, müßten weitere Versuche entscheiden. Dafür scheint eine Beobachtung zu sprechen, die oft an Freiballonen gemacht worden ist.¹⁾ Bei ihnen macht sich kurz nach dem Loslassen eine starke Verminderung der Steiggeschwindigkeit bemerkbar, die fast immer der Anlaß zu einer Ballastabgabe ist. Es liegt nahe, auch hier als Ursache die Bildung eines Wirbelringes anzunehmen, nach dessen Trennung vom Ballon dieser dann wieder schneller steigen würde. Der ausgeworfene Ballast könnte daher, falls nicht gerade Hindernisse im Wege sind, gespart werden. Der Verlauf der Zeit-Geschwindigkeitskurve würde allerdings wahrscheinlich etwas anderes sein als eine Extrapolation der Schar in Fig. 8 ergeben würde, da bei den großen für einen Freiballon in Frage kommenden Reynoldsen Zahlen, sofern sie den Wert von etwa 50000 überschreiten, der Widerstandskoeffizient einen erheblich kleineren Wert annimmt, wie die Versuche von Prandtl und Eiffel ergeben haben.

Die Werte von v_{\max} nähern sich mit Abnahme des Auftriebes nicht dem Wert Null, sondern 3,2 und die Minima dem Wert 2. Das erscheint darauf hinzuweisen, daß für Auftriebe die nach der Gleichung $Ag = \psi \rho F v_e^2$ eine kleinere Endgeschwindigkeit ergeben als 3,2 cm/sec, der Strömungsverlauf anders ist als bei den hier gemachten Versuchen. Vielleicht kommt es dann nicht zur Ausbildung eines Wirbelringes und wahrscheinlich wird dann das quadratische Widerstandsgesetz durch ein anderes ersetzt. Der Umstand, daß sich v_{\max} und v_{\min} nicht demselben Grenzwert nähern bei abnehmendem Auftrieb, wird in Beobachtungsfehlern seinen Grund haben. Der Endgeschwindigkeit 3,2 cm/sec kommt eine Reynoldse Zahl

$$\frac{rv}{\nu} = 310$$

zu. Nun gilt nach den Beobachtungen von Allen für $R \leq 127$ die Beziehung: Widerstand proportional $v^{1.5}$, nach den hier gemachten Beobachtungen für $R \geq 600$: Widerstand proportional v^2 . Die Vermutung liegt also nahe, etwa bei der Zahl

1) Nach einer Mitteilung von Hrn. Geheimrat Wiener.

$R = 300$ den Übergang zwischen beiden Gesetzen zu suchen. Ausdehnung der Versuche in diesen Bereich könnte darüber Aufschluß geben. Diese würden auch zeigen, ob der Andeutung, daß für die kleinsten Reynold'schen Zahlen ($R = 600$), für die hier Geschwindigkeiten beobachtet wurden, ψ nicht mehr konstant ist, sondern mit Abnahme von R wächst (vgl. S. 644), wirkliche Tatsachen zugrunde liegen, oder ob sie nur Ungenauigkeiten in Messungen ihre Entstehung verdankt. Die Änderung, Zunahme von ψ mit Abnahme von R liegt in dem Sinne, wie sie eintreten müßte, wenn mit Abnahme von R der Widerstand proportional einer Potenz von v , die kleiner als 2 ist, würde.

Durch die Gleichungen (7), (8), (7a) und (8a) sind jetzt die Hauptpunkte der Bewegung genau festgelegt, da durch sie für jeden Auftrieb die Größe der Geschwindigkeit im ersten Maximum und Minimum von v , sowie die Zeiten, zu denen sie eintreten, bekannt sind. Ferner kennt man die Endgeschwindigkeit. Im einzelnen geben die Kurven der Schar in Fig. 8 Aufschluß über den Bewegungsverlauf. Sucht man diesen für beliebig gegebene Verhältnisse, so transformiert man den betreffenden Auftrieb auf die von Fig. 8, interpoliert mit ihm die dazugehörige Kurve aus den Kurven der Schar und transformiert diese Kurve auf die gegebenen Verhältnisse. Für Körper von anderer als kugelförmiger Gestalt müßte durch Versuche eine der auf Fig. 8 enthaltenen analoge Schar gewonnen werden.

Die hier gewonnenen Ergebnisse stehen zum Teil in Widerspruch zu denen der eingangs erwähnten Arbeit von Schiller und Döge. Für die stationäre Bewegung hatten sich dort Widerstandskoeffizienten von 0,29 und größer ergeben im Gegensatz zu 0,22 hier. Ferner war gefunden worden, daß die scheinbare Masse des Körpers während der beschleunigten Bewegung, von größeren Werten als die wirkliche Masse bis zu solchen kleiner als diese abnahm, d. h., daß der Widerstand im Anfang größer, dann kleiner war, als er nach dem quadratischen Gesetz sein sollte. Hier dagegen hat sich der Widerstand immer größer als $\psi \rho F v^2$ gezeigt, solange Beschleunigung vorhanden war. Die Ergebnisse der ersten Arbeit dürften dadurch zustande gekommen sein, daß an Stelle der

wirklichen Endgeschwindigkeit die Geschwindigkeit im ersten Maximum als diese angesehen wurde. Nach einer Mitteilung von Dr. Schiller wurde das Mittel aus den um den größten beobachteten Wert liegenden Geschwindigkeiten als Endgeschwindigkeit benutzt, da, vielleicht wegen nicht ausreichend exakten Arbeiten des dort benutzten einfacheren Verschlussmechanismus, der genaue Charakter der Kurven nicht wie in der vorliegenden Arbeit zutage trat. Tatsächlich haben auch hier die erst später angestellten Kugelversuche, die eine längere Verfolgung der Bewegung gestatteten, als bei den Ballonen in Luft möglich war, darüber Aufschluß gegeben, daß die Geschwindigkeit nach Erreichung des ersten Maximums nicht um dessen Wert herumpendelt, sondern sich schließlich einem erheblich höheren Grenzwert nähert. Aus der Benutzung einer kleineren Geschwindigkeit als die Endgeschwindigkeit ergibt sich aber aus der Gleichung

$$Ag = \psi \rho F v^2$$

ein zu großer Wert von ψ . Nach den hier gemachten Beobachtungen wird die aus diesen zu großen Werten von ψ berechnete Endgeschwindigkeit von kleineren als den dort benutzten Ballonen bereits erheblich überschritten, ein Beweis dafür, daß der hier nur aus den Endgeschwindigkeiten der Wachskugeln ermittelte Wert von ψ den wirklichen Verhältnissen wenigstens bei den kleinen Ballonen näher kommt als der von Schiller und Döge angegebene kleinste Wert. Es ist wahrscheinlich, daß dies auch für größere Ballone zutrifft, womit dann dort weiter gezogene Folgerungen über Abnahme der scheinbaren Masse bei Bewegung mit Beschleunigung hinfällig würden.

III. Zusammenfassung.

Die Beobachtung kugelförmiger frei fallender oder steigender Körper in ruhender Flüssigkeit ergab:

1. Widerstand nach Erreichung der Endgeschwindigkeit

$$Wg = \psi \rho F v^2,$$

$$\varphi = 0,22 \quad \text{für} \quad 600 < R = \frac{vr}{v} < 1500.$$

2. Bestätigung des Ähnlichkeitsgesetzes für den ganzen Verlauf der Bewegung und infolgedessen Möglichkeit, unter

verschiedenen Bedingungen (Flüssigkeit, Längenmaß) gemachte Beobachtungen auf die gleichen zu transformieren.

3. Vor Erreichung der Endgeschwindigkeit ist

$$Wg > \psi \rho F v^2,$$

und zwar näherungsweise darstellbar durch:

$$Wg = \psi \rho F v^2 + b_1 \frac{dv}{dt} + b_2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2,$$

die Geschwindigkeit durch: $v = v_E (1 - C^t)$.

4. Die Geschwindigkeit nimmt nicht ständig zu mit der Zeit, sondern nimmt vor Erreichung der Endgeschwindigkeit ein Maximum und ein Minimum an, um nach ihnen unter weiteren Schwankungen der Endgeschwindigkeit zuzustreben. Die zusammengehörigen Werte von Geschwindigkeit und Zeit in den Maximis und Minimis sind durch einfache Beziehungen miteinander verknüpft.

5. Maximum und Minimum der Geschwindigkeit hängen mit Bildung, Wachsen und Trennung eines Wirbelringes hinter dem Körper zusammen, der in einzelnen Fällen sichtbar gemacht werden konnte.

6. Die Beobachtungen ermöglichen die Vorhersage des Verlaufes der Bewegung eines unter konstanter Kraft stehenden Körpers von Kugelform, wenn Radius, Kraft und Flüssigkeit irgendwie gegeben sind, sofern die zu den sich aus dem quadratischen Widerstandsgesetz ergebenden Endgeschwindigkeiten gehörigen Reynoldsen Zahlen

$$R = \frac{v r}{\nu}$$

zwischen 600 und 50000 liegen.

Leipzig, Physik. Institut der Universität.

(Eingegangen 23. September 1919.)

